I 24763

2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL IX.

ANUL 1929—1930.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „CARTEA ROMANEASCĂ"
1930.

'05

JAN 2014

I 24763

ANUL IX. 15 MARTIE 1929 NO. 1

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CONST. IONESCU-BUJOR EXTINDERI IN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI.
2. NOTE MATEMATICE, 1, 2, 3.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 728, 747, 748, 751.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

2407

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. şef C. C Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Rugăm a se trimete urgent costul abonamentului pentru anul 1929 — 1930.

Cu regret anunţăm că nu vom putea trimete No. 2, acelor ce nu vor fi în curent cu plata abonamentului.

In caz de neabonare, rugăm a restitui No. 1.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

Revista Matematică din Timişoara apare sub conducerea unui comitet compus din următorii:

Abason Ernest,	inginer, doctor în matematici, Justinian 20, Bucureşti.
Abramescu N.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Adam D. Romeo,	sublt. de geniu, str. M. Gogâlniceanu 31, Bucureşti
Adamescu Maxim,	licenţiat în matematici, inspector financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
Alaci Valeriu,	doctor în matematici, profesor la şc. Politechnică Timişoara, str Gen. Foch 27, Timişoara.
Alexandrescu El.,	profesoară la externatul secundar de fete, str. Argetoianu 7, Constanţa.
Angelescu A.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Angheluţă Th.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Arghir Iancu,	profesor la liceul din Tg.-Jiu.
Bădulescu Vasile,	profesor liceul M. Eminescu din Floreasca, Bucureşti.
Balaban N.,	profesor liceul Carol I, Craiova.
Balaban Gh.,	profesor la şc. secundară de fete gr. II, „Sturza Cantacuzino", Roman.
Balasz D.,	inginer, asistent la şc. Politechnică, str. Gen. Joffre 12, Timişoara.
Bănărescu Marin,	inginer la atelierele C. F. R., profesor la Politechnică, str. Doja 51, Timişoara.
Banciu I.,	prof., dir. general al contabilităţii în Ministerul de Instrucţie, str. Lucaci 95, Bucureşti.
Baron Constantin,	asistent la catedra de fizică, şc. Politechnică din Timişoara.
Blaşian V..	inginer de mine, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.
Botez Mihai,	profesor la şc. normală, şi liceul milit., str. Speranţei 12, Iaşi.
Bratu Gh.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Breazu D.,	profesor la liceul din Caracal.
Buicliu Gh.,	colonel în artilerie, Comandantul reg. 38 obuziere, profesor la şc. Polltechnică, Timişoara.
Burghele B.,	inginer. Serviciul hidraulic, Galaţi
Butoescu Traian,	inginer la uzina electrică Arad, asistent la şc. Politechnică.
Cândea C.,	doctor-inginer, profesor la şc. Politechnică din Timişoara.
Caraman E.,	director şc. normală Galaţi.
Cărdeiu V.,	profesor la liceul Aron Pumnul, Cernăuţi
Chivulescu C.,	licenţiat în matematici, inspector financiar, Târgovişte.
Cica Gh.,	profesor la şc superioară de comerţ, Piteşti.
Cismărescu M.,	licenţiat în matematici, inspector financiar, T.-Severin.
Ciurceu V..	inginer la uzina electrică Timişoara.
Corneanu P.,	inginer la societatea Concordia, Gura-Ocniţei, Dâmboviţa.
Constantinescu Gh.,	profesor, Piaţa Elca 18, Craiova.
Crăciunescu I.,	profesor la liceul Cantemir, Bucureşti.
Cristescu I.,	inginer, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.
Coman August	profesor, lic. C. Diaconovici-Loga, conferenţiar la şc. Politechnică, str. Feldioara 1, Timişoara.
Diaconescu Nic.,	profesor lic. din Slatina.
Dragalina Corneliu,	lt.-colonel, str. general Dragalina, No. 1, Bucureşti.
Dumitrescu Gh.,	profesor, str. Gramont 16, Bucureşti.
Demetrescu Gh.,	doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.
Dordea A. Traian,	profesor la liceul din Oltenita.
Dimitriu-Arad I.,	profesor la liceul Moise Nicoară, str. Bucur 3, Arad.
Duţulescu Marin,	licenţiat în matematici, inspector financiar, str. Eminescu 20, Bucureşti.
Florescu Mihai,	inginer inspector silvic, str. Alex. Orescu 9, Bucureşti.
Georgescu D.,	profesor la liceul din Piteşti, str. Negru-Vodă 14, Piteşti.
Ghermănescu M.,	profesor la liceul Cantemir, str. Raion 31, Bucureşti.
Hubert M.,	inginer-arhitect, bulevard. Mihai-Viteazul 21, Bucureşti.
Hristea Horaţiu,	inginer la dep. C. F. R., asistent la şc. Politechnică, Timişoara.
Ionescu K. C.,	directorul liceului real Dr. Meşotă, Braşov.
Jecu M. Ioan,	licenţiat în matematici. str. V. Lascăr (Teilor) 77, Bucureşti.
Lalescu Traian,	doctor în matematici, profesor la Universitatea şi şc. Politechnică din Bucureşti, fost rector la şc. Politechnică din Timişoara, Vasile Boerescu, 19, Bucureşti.
Leonida D..	inginer, prof. la şc. Politechnică, str. Sălcii 11, Bucureşti.
Linteş I.,	căpitan de artilerie, str. Epicol 49, Bucureşti.
Liteanu Gh.,	maior în artilerie, Alea Sevastopol 27, Bucureşti.
Lupan Andrei,	inginer, director la Reşiţa, prof. la şc. Politechnică. str. Povernei 3, Bucureşti.
Magheru I.,	doctor în ştiinţe, profesor la şc. Politechnică, Timişoara.

Manughevici C.,	inginer-chimist, şef de lucrări la şc. Politcchnică, str. Paul Chinezul 7, Timişoara.
Mardan D.,	inginer-şef, directorul fabricei de tutun, profesor la şc. Politechnică din Timişoara, fabrica de tutun din Timişoara.
Mihaly Elemér,	profesor la liceul din Deva.
Mioc V.,	profesor la liceul C. Diaconovici-Loga, Timişoara.
Naneş Gh.,	profesor la lic. Sf. Sava, Bucureşti.
Nicolau Alex.,	inginer, profesor la şc. Politechnică, Uzina electrică, Craiova.
Nicolau Pompiliu,	inginer, profesor la şc. Politechnică, Timişoara
Noaghea Gh.,	profesor la liceul din Caransebeş
Nichifor Gh.,	doctor în matematici, conferenţiar la Universitatea din Bucureşti, str. Racoviţă 32, Bucureşti
Niculescu Cristea,	inginer-şef, director general la soc. I. A. R., Arad.
Oncica Ioan,	profesor la liceul Piteşti.
Onicescu O.,	profesor universitar, Clopotarii-Vechi 25, Bucureşti.
Orăşeanu C.,	inginer-şef, licenţiat în matematici, profesor la şc. Politcchnică Bucureşti.
Orăşeanu Gr.,	profesor la liceul Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
Otopeanu C.,	inginer.
Petrescu A.,	doctor în matematici, directorul Academiei Agricole, Cluj.
Petricoane D. M.,	directorul liceului din Oraviţa.
Purcariu Ilie,	director general, Ministerul de instrucţie publică, Bucureşti.
Protopopescu I.,	inginer-şef, prof. şi subdirectorul şc. Politechnice, Timişoara.
Rod Nicolae Raclis	conferenţiar la universitatea din Bucureşti.
Roibănescu C.,	profesor Bulev. I. C. Brătianu 7, Tg.-Jiu.
Saegiu E.,	inginer-şef. serviciul construcţiei C. F. R., str. Berzei 70, Bucureşti.
Şerbănescu Dumitru,	inginer la calea ferată Arad-Podgorie, asist. la şc. Politenchnică
Sergescu P.,	doctor în matematici, licenţiat în filozofie, profesor la Universitate Cluj.
Severineanu C.,	inginer-şef, subdirectorul serviciului tracţiunei C. F. R, prof., la şc. Politechnică, Timişoara.
Simniceanu Sava	profesor, str. Griviţei 3, Craiova.
Spineanu Cezar,	profesor, str. Veştei 24, Târgovişte.
Stăncescu C.,	doctor-inginer, prof. la şc. Politechnică, str. Bem 8, Timişoara
Stoicescu M.,	profesor, str. Zefirului 4, Bucureşti.
Teodorescu Constantin,	inginer-şef, profesor la şc. Politechnică. directorul şc. superioare p. t. t. Timişoara.
Thierrin Gabriel,	directorul inst. Schewitz Thierrin, Scaune 33, Bucureşti.
Ţino Ovidiu,	doctor in matematici, prof. şc. Politechnică, Timişoara.
Popescu E.,	doctor în chimie dela Sorbona, profesor la şc. Politechnică, Bucureşti.
Teodosiu Avram,	doctor în matematici, profesor la Academia de Agricultură Cluj.
Vâlcovici V.,	doctor în matematici, rectorul şc. Politechnice, str. Martirului 3, Timişoara.
Vasiliu M.,	inginer, asistent la şc. Politechnică Bucureşti, str. Obădeanu 10, Bucureşti.
Vasiliu Gh.,	inginer la depozitul C. F. R., calea Traian 23, Satu-mare.
Vlad I. V.,	inginer-arhitect, profesor la şc. Politechnică, str. Bonnaz, 20, Timişoara.
Zapan Grigore,	căpitan aviator, str. Carol 8, Tecuci.

ANUL IX — No. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1929

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

EXTINDERI IN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

II. CHESTIUNI IN LEGĂTURĂ CU PUNCTELE INVERSE

de CONST. IONESCU-BUJOR

Articolul publicat în „R. M. T.“, vol. VIII, No. 7, schițează o perspectivă nouă a geometriei triunghiului.

Elemente ale unui triunghiu, puncte și curbe remarcabile, proprietăți, sunt în strânsă legătură unele cu altele deduse sau definite cu ajutorul unui singur element. Ca element generator ar putea fi privit oricare dintre ele; alegerea mea s'a oprit asupra ortocentrului.

Ortocentrul este așa dar germenul unei lumi de puncte, curbe și proprietăți, și dacă legăturile pot fi înfățișate ca proective, ortocentrul devine prin proecție cilindrică pe alt plan, un punct oarecare M, cu o lume analoagă de puncte, curbe și proprietăți deduse din M prin legături „identice“.

Deci orice punct din planul unui triunghiu, generează elemente analoage celor generate până acum de ortocentru, se impune, în acest caz, cerința precizării unui al doilea element de referință: punctul alături de triunghiu.

Și am înșiruit câteva elemente remarcabile ale triunghiului de referință și punctului de referință M.

In cadrul acestor elemente voi stabili chestiuni nouă și strâns legate de punctele inverse, pe care le-am definit astfel:

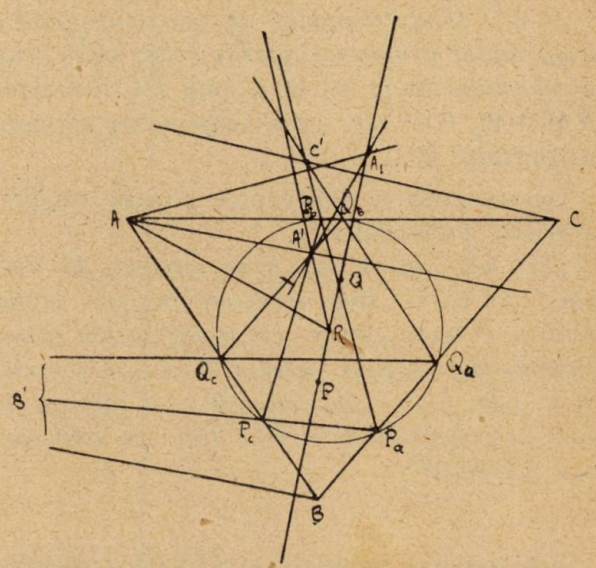
„A B C *și* M *fiind cele două elemente de referință, două puncte* P, Q *ale căror ceviene corespunzătoare determină puncte izotomice pe laturile triunghiului pedal al punctului lui Gergonne, sunt puncte inverse ale sistemului* M“.

* * *

„A B C *fie triunghiul de referință și* P, Q *două puncte inverse în sistemul ortic. Laturile triunghiului podar al punctului* P, *întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului podar al punctului* Q *în* A′, B′, C′ *așa fel că* A A′, B B′, C C′ *sunt paralele, direcția fiindu-le perpendiculară pe* P Q.“

Am publicat această proprietate în *„Curierul Matematic“*, vol. II, pag. 185; reviu asupra ei fiind punct de plecare al unor serii de chestiuni, cum și pentru demonstrația ce i-am dat.

$P_a P_b P_c$ și $Q_a Q_b Q_c$ triunghiurile podare ale punctelor P și Q sunt înscrise în același cerc (C), ceiace aduce antiparalelismul dreptelor $P_b P_c$, $Q_b Q_c$ în raport cu unghiul B A C. Cercurile $A P_b P_c$ și $A Q_b Q_c$ au drept axe radicale cu cercul (C)



respectiv dreptele $P_b P_c$, $Q_b Q_c$, a căror intersecție A′ este centrul radical al celor trei cercuri. In consecință ceviana A A′ este ax radical al cercurilor $A P_b P_c$, $A Q_b Q_c$. Segmentele A P, A Q sunt dia

metre ale acestor cercuri și cum axul radical AA' este perpendicular pe dreapta ce unește mijloacele acestor segmente, AA' este perpendicular și pe PQ.

Analog demonstrez perpendicularitatea dreptelor BB', CC' pe PQ.

Din această proprietate se desprinde următorul caz particular interesant:

„In triunghiul de referință ABC, *laturile corespunzătoare ale triunghiurilor ortic și median se taie în* A', B', C', *așa fel că dreptele* AA', BB', CC' *sunt perpendiculare pe dreapta lui Euler.“*

Se știe însă că axa ortică, adică polara trilineară a ortocentrului e perpendiculară pe dreapta lui *Euler,* ceiace conduce la următoarea formă a proprietății, formă evidențiând posibilități proective.

„ABC *fiind triunghiul de referință, laturile corespuuzătoare ale triunghiului ortic și median se taie în* A', B', C' *așa fel că dreptele* AA', BB', CC' *sunt paralele cu polara trilineară a ortocentrului“.*

Proectând cilindric figura ultimei proprietăți, privită cum am precizat-o în ultima ei formulare, se extinde la un sistem oarecare M sub următoarea formă:

„ABC *fiind triunghiul de referință, laturile triunghiului median tae laturile triunghiului pedal al punctului* M *în* A', B', C' *așa fel că dreptele* AA', BB', CC' *sunt paralele cu polara trilineară a punctului* M“.

Generalizarea se obține prin proecția cilindrică a primei proprietăți:

„*Fie* ABC *și* M *cele două elemente de referință* A', B', C' *fiind punctele în care se taie laturile corespunzătoare ale triunghiurilor podare formate de punctele inverse* P *și* Q, *cevienele* AA', BB', CC' *sunt paralele; iar direcția lor este conjugată direcției* PQ *față de conicele* I *ale sistemului“* *).

* * *

Voi considera proprietatea dualã polar reciprocă primei chestiuni stabilită, transformarea efectuându-se în raport cu cercul circumscris triunghiurilor podare ale punctelor P și Q, cerc al cărui centru R se află pe PQ și echidistant de P și Q.

Observând că punctele A și A' sunt conjugate față de acest cerc, urmează că perpendiculara dusă din A' pe RA este polara lui A, iar perpendiculara pe RA', trecând prin A, este polara lui A', în cât punctul de întâlnire A, al acestor drepte este polul cevienei AA'. Perpendicularitatea înfățișată dintre AA' și diametrul PQ al cercului R conduce la precizarea situației polului A_1 pe PQ.

Considerațiuni analoage învederează că B_1, C_1 obținute în același fel, sunt pe PQ și proprietatea ia forma următoare:

„*Fie triunghiul* ABC *și ortocentrul său, cele două elemente de referință, triunghiurile podare ale punctelor inverse* P, Q *își intersectează laturile corespunzătoare în* A', B', C', *iar* R *este mijlocul segmentului* PQ.

Perpendicularele duse din A, B, C *pe* RA', RB', RC' *întâlnesc respectiv perpendicularele pe* RA, RB, RC *trecând prin* A', B', C' *în trei puncte situate pe dreapta* PQ.“

Particularizând, considerând punctete P și Q, ortocentru și centru al cercului circumscris unui triunghiu, urmează posibilitatea exprimărei în următoarea formă a proprietății deduse:

„ABC *fiind triunghiul de referință, laturile corespunzătoare ale triunghiurilor ortic și median tăindu-se în* A', B', C'. *Cevienele perpeudiculare pe* $O_q A'$, $O_q B'$, $O_q C'$ *întâlnesc perpendicularele din* A', B', C' *pe cevienele centrului cercului lui Euler:* O_q, *în trei puncte situate pe dreapta lui Euler a sistemului ortic.“*

Revenind la forma din care am dedus acest caz particular interesant, se va observa că ea se mai poate enunța astfel:

„*Fie triunghiul* ABC *și ortocentrul său, cele două elemente de referință triunghiurile podare ale punctelor inverse* P *și* Q *își intersectează laturile corespunzătoare în* A', B', C'.

Polurile dreptelor AA', BB', CC' *luate în raport cu cercul circumscris triunghiurilor podare sunt situate pe dreapta* PQ.“

In această formă proprietatea este proectivă și induce cazul general „foarte apropiat ca enunț“, dar larg ca sens:

*) Intr'un articol apropiat voiu preciza sensul ultimei propoziținni.

Fie A B C *şi* M *cele două elemente de referinţă, triunghiurile podare ale punctelor inverse* P *şi* Q *îşi intersectează laturile corespunzătoare în* A′, B′, C′.

Polurile dreptelor A A′, B B′, C C′ *luate în raport cu conica circumscrisă triunghiurilor podare considerate, se află pe dreapta* P Q.“

NOTE MATEMATICE

1. *Asupra problemei 717, din R. M. T.*

Analog acestei probleme se poate pune următoarea:

Dacă $\frac{a}{b+\alpha}$ *este baza logaritmilor, să se determine* α, *astfel ca să avem:*

$$a(\log b - b) - b(\log a + a) = 2ab\log\alpha.$$

Relaţia din enunţ se poate scrie:

$$a\log b - ab - b\log a - ab = 2ab\log\alpha$$

sau:

$$\log b^a - \log a^b - \log\alpha^{2ab} = 2ab.$$

$$(1) \qquad \therefore \quad \log\frac{b^a}{a^b\,.\,\alpha^{2ab}} = 2ab.$$

Conform enunţului, avem:

$$\log\frac{a}{b+\alpha} = 1,$$

deci:

$$(2) \qquad 2ab\log\frac{a}{b+\alpha} = 2ab.$$

Din relaţiile (1) şi (2), rezultă:

$$\log\frac{b^a}{a^b\,.\,\alpha^{2ab}} = 2ab\log\frac{a}{b+\alpha} = \log\frac{a^{2ab}}{(b+\alpha)^{2ab}}.$$

Logaritmii fiind egali rezultă:

$$\frac{b^a}{a^b\,.\,\alpha^{2ab}} = \frac{a^{2ab}}{(b+\alpha)^{2ab}}$$

Extrăgând rădăcină $2ab$ şi luând numai valoarea reală a, b fiind consideraţi reali, avem:

$$\frac{a}{b+\alpha} = \frac{b^{\frac{1}{2b}}}{\alpha\,a^{\frac{1}{2a}}}.$$

Rezolvând această relaţie în raport cu α avem:

$$\alpha = \frac{a\,b^{\frac{1}{2b}-1}}{a^{\frac{1}{2a}} - b^{\frac{1}{2b}-1}} = \frac{a}{b^{1-\frac{1}{2a}}\,.\,a^{\frac{1}{2b}} - 1}.$$

Analog:

Dacă $\frac{b}{a+\alpha}$ *este baza logaritmilor, să se determine* α, *astfel ca să avem:*

$$b(\log a - a) - a(\log b - b) = 2ab\log\alpha.$$

Făcând un raţionament analog găsim:

$$\alpha = \frac{a\,b^{\frac{1}{2b}-1}}{a^{\frac{1}{2a}} - b^{\frac{1}{2b}-1}} = \frac{a}{b^{1-\frac{1}{2b}}\,.\,a^{\frac{1}{2b}} - 1}.$$

Dacă $\frac{\alpha}{a+b}$ *este baza logaritmilor, să se determine* α, *astfel ca să avem:*

$$b(\log a - a) - a(\log b + b) = 2ab\log\alpha.$$

$$\frac{\alpha}{a+b} = \frac{a^{\frac{1}{2a}}}{\alpha\,b^{\frac{1}{2b}}},\quad \alpha^2 = \frac{(a+b)\,a^{\frac{1}{2a}}}{b^{\frac{1}{2b}}},\quad \alpha = \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}\,a^{\frac{1}{4a}}}{b^{\frac{1}{4a}}}$$

Raţionament analog:

Dacă $\frac{\alpha}{a+b}$ *este baza logaritmilor, să se determine* α, *astfel ca să avem:*

$$a(\log b - b) - b(\log a + a) = 2ab\log\alpha.$$

$$\frac{\alpha}{a+b} = \frac{b^{\frac{1}{2b}}}{a^{\frac{1}{2a}}\,\alpha},\quad \alpha^2 = \frac{(a+b)\,b^{\frac{1}{2b}}}{a^{\frac{1}{2a}}},\quad \alpha = \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{4b}}}{a^{\frac{1}{4a}}}$$

Raţionament analog.

RAMNICEANU I. CRISTIAN

2. *Generalizarea problemei 710 din „R. M. T.“*

In această problemă se cerea să se stabilească identitatea:

$$\sum_{k=4}^{n}\frac{2k+3}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = \frac{2}{3} - \frac{n+1}{n^3-3n^2+2n}.$$

Iată o soluţie diferită de cea dela pag. 60, „R. M. T.“. No. 4, an. VIII.

Să descompunem în fracții simple, termenul general al sumei din membrul întâi. Vom avea;

$$\frac{2k+3}{k(k-1)(k-2)(k-3)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k-1}+\frac{C}{k-2}+\frac{D}{k-3}$$

Sau:

$$2k+3=A(k-1)(k-2)(k-3)+$$

$$Bk(k-2)(k-3)+Ck(k-1)(k-3)+Dk(k-1)(k-2)$$

Pentru $k=0$, găsim $A=-\frac{1}{2}$; pentru $k=1$, $B=\frac{5}{2}$; pentru $k=2$, $C=-\frac{7}{2}$ și pentru $k=3$, $D=\frac{3}{2}$.

Deci:

$$\frac{2k+3}{k(k-1)(k-2)(k-3)}=$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{k}+\frac{5}{k-1}-\frac{7}{k-2}+\frac{3}{k-3}\right).$$

Dând lui k valorile 4, 5, ..., n și adunând, avem:

$$\sum_{k=4}^{n}\frac{2k+3}{k(k-1)(k-2)(k-3)}=\frac{1}{2}\left[-\left(\sum_{k=4}^{n-1}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right)+\right.$$

$$\left(\frac{1}{3}+\sum_{k=5}^{n}\frac{1}{k-1}\right)+4\left(\sum_{k=4}^{n-1}\frac{1}{k-1}+\frac{1}{n-1}\right)-$$

$$4\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=5}^{n}\frac{1}{k-2}\right)-3\left(\sum_{k=4}^{n-1}\frac{1}{k-2}+\frac{1}{n-2}\right)+$$

$$\left.3\left(1+\sum_{k=5}^{n}\frac{1}{k-3}\right)\right].$$

Se observă însă că:

$$\sum_{k=4}^{n-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=5}^{n}\frac{1}{k-1};\quad\sum_{k=4}^{n-1}\frac{1}{k-1}=\sum_{k=5}^{n}\frac{1}{k-2};$$

$$\sum_{k=4}^{n-1}\frac{1}{k-2}=\sum_{k=5}^{n}\frac{1}{k-3}.$$

Și în general:

$$\sum_{k=i}^{n-1}\frac{1}{k-r+1}=\sum_{k=i+1}^{n}\frac{1}{k-r}.$$

Făcând toate simplificările posibile obținem:

$$\sum_{k=4}^{n}\frac{2k+3}{k(k-1)(k-2)(k-3)}=\frac{2}{3}-\frac{n+1}{n^3-3n^2+2n},$$

care e tocmai identitatea cerută.

Generalizare:

Fie de calculat suma mai generală:

$$S=\sum_{k=p+1}^{n}\frac{(p-1)k+p}{k(k-1)(k-2)\ldots(k-p)}.$$

S'ar putea da o soluție analoagă celei de mai sus însă calculele ce trebuesc făcute sunt foarte anevoiase, de oarece trebue să descompunem termenul general al sumei în fracții simple. Voi întrebuința deci o altă metodă, bine cunoscută.

Dacă luăm:

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p)},$$

vom avea:

$$f(x+1)=\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1)}.$$

Așa că:

$$f(x)-f(x+1)=$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\ldots(x-p+1)}\left[\frac{x}{x-p}-\frac{x+1}{x}\right]=$$

$$\frac{(p-1)x+p}{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-p+1)(x-p)}.$$

Conform identității:

$$\sum_{k=p+1}^{n}[f(k)-f(k+1)]=f(p+1)-f(n+1).$$

Vom avea:

$$(1)\quad\sum_{k=p+1}^{n}\frac{(p-1)k+p}{k(k-1)(k-2)\ldots(k-p)}=\frac{p+1}{1.2.3\ldots p}$$

$$-\frac{n+1}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}.$$

Regăsim problema 710, făcând aici $p=3$.

Observare.

Pentru $n=\infty$, relația (1) devine următoarea serie:

$$\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{(p-1)k+p}{k(k-1)(k-2)\ldots(k-p+1)(k-p)}=\frac{p+1}{p!}$$

Dacă aici facem $p = 3$, obținem suma seriei:

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2k+3}{k(k-1)(k-2)(k-3)} = \frac{2}{3},$$

dedusă de d-l *Gh. Th. Gheorghiu* cu ocazia rezolvirii problemei 710.

NICOLAE O. ZAHARIA

Observare. A se vedea și articolul: *„Asupra câtorva însumări"* „R. M. T.", vol II, p. 99.

3. *Câteva relațiuni remarcabile într'un triunghiu.* Dau mai jos o serie de relațiuni cari exprimă distanțele între vârfurile unui triunghiu și centrele cercurilor tritangente sau între centrele cercurilor tritangente și perimetru, având încrederea că ar putea fi utilizate de cei interesați, pentru a găsi încă diferite proprietăți ale triunghiului folosind numai calea calculului, fără figură.

* * *

Fie deci triunghiul A B C, apoi I, I_a, I_b, I_c centrele celor 4 cercuri tritangente ale sale, iar r, r_a, r_b, r_c, p respectiv razele acestor cercuri și semiperimetrul triunghiului.

Avem relațiile:

$$\overline{AI_a}^2 = (r_a + r_b)(r_a + r_c)$$

$$\overline{BI_b}^2 = (r_b + r_c)(r_b + r_a)$$

$$\overline{CI_c}^2 = (r_c + r_a)(r_c + r_b)$$

$$\overline{AI}^2 = \frac{r^2(r_a + r_b)(r_a + r_c)}{r_a^2}$$

$$\overline{BI}^2 = \frac{r^2(r_b + r_c)(r_b + r_a)}{r_b^2}$$

$$\overline{CI}^2 = \frac{r^2(r_c + r_a)(r_c + r_b)}{r_c^2}$$

$$\overline{AI_b}^2 = \frac{r_b^2(r_a + r_b)(r_a + r_c)}{p^2}$$

$$\overline{AI_c}^2 = \frac{r_c^2(r_a + r_b)(r_a + r_c)}{p^2}$$

$$\overline{BI_c}^2 = \frac{r_c^2(r_b + r_c)(r_b + r_a)}{p^2}$$

$$\overline{BI_a}^2 = \frac{r_a^2(r_b + r_c)(r_b + r_a)}{p^2}$$

$$\overline{CI_a}^2 = \frac{r_a^2(r_c + r_a)(r_c + r_b)}{p^2}$$

$$\overline{CI_b}^2 = \frac{r_b^2(r_c + r_a)(r_c + r_b)}{p^2}$$

$$\overline{II_a}^2 = \frac{r_a^2(r_b + r_c)(r_a + r_b + r_c - r)}{p^2}$$

$$\overline{II_b}^2 = \frac{r_b^2(r_c + r_a)(r_a + r_b + r_c - r)}{p^2}$$

$$\overline{II_c}^2 = \frac{r_c^2(r_a + r_b)(r_a + r_b + r_c - r)}{p^2}$$

$$\overline{I_a I_b}^2 = (r_a + r_b)(r_a + r_b + r_c - r)$$

. . . . . .

. . . . . .

CEZAR COSNITA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, No. 6, Februarie 1929. O transformare algebrică, de *D. V. Ionescu*. Metodologia matematicilor (urmare), de † *N. C. Segârceanu*. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului de matematici aplicate la științele militare, pe intervalul 1 Sept. 1927 — 31 August 1928. intocmit de *Colonel Gh. Buicliu I. Capriel, Colonel Tănăsescu.*

PROBLEME REZOLVATE

728*. — *Se dă un carton circular și omogen de centru* O. *De o parte și de alta a centrului, se duc două coarde paralele* A B *și* C D, *egale respectiv cu latura patratului și a exagonului, înscrise în cercul* O.

Se fac în cartonul dat, două deschideri circulare, cercurile de deschidere fiind înscrise respectiv în triunghiurile O A B *și* O C D. *Se cere centrul de greutate al cartonului rămas, după ce am scos cele două discuri circulare.*

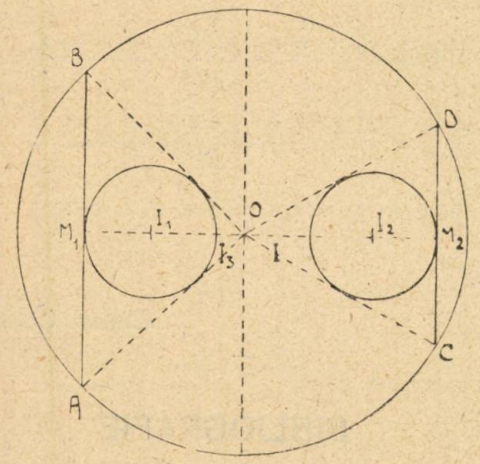
V. ALACI

Problema este o aplicație de compunere a trei forțe paralele, două într'un sens și a treia în sens opus. In adevăr, asupra cartonului plin, lucrează în centrul său o forță verticală $\overline{F}$, greutatea lui,

pe care o putem lua proporţională cu suprafaţa sa, adică:

$$F = k\pi a^2,$$

a fiind raza cercului O, F valoarea numerică a forţei $\overline{F}$.



Scoaterea celor două cercuri, echivalează cu aplicarea în centrele lor I_1, I_2 a două forţe $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, de sens opus cu $\overline{F}$, proporţionale cu suprafeţele lor. Să găsim aceste suprafeţe.

Ştim în general, că:

$$r = \frac{s}{p},$$

adică raza cercului înscris într'un triunghiu, este câtul între suprafaţa şi semiperimetrul său.

Cum, din enunţ:

$$AB = a\sqrt{2},\ CD = a,\ OM_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2},\ OM_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

putem scri, r_1 şi r_2 fiind razele cercurilor I_1 şi I_2:

$$r_1 = \frac{AB \cdot OM_1}{2p_1} = \frac{a^2}{2a + a\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})a}{2},$$

$$r_2 = \frac{CD \cdot OM_2}{2p_2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Rezultă atunci că mărimea forţelor $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$, este:

$$F_1 = \frac{k\pi(3-2\sqrt{2})a^2}{2},\quad F_2 = \frac{k\pi a^2}{12}.$$

Compunem acum forţele $\overline{F}_1$ şi $\overline{F}_2$. Punctul de aplicaţie I_3 al rezultantei se află pe $I_1 I_2$ şi astfel ca să avem:

$$\frac{I_3 I_1}{F_2} = \frac{I_3 I_2}{F_1} = \frac{I_1 I_3}{F_1 + F_2},$$

deci:

$$(1) \qquad I_3 I_1 = \frac{F_2}{F_1 + F_2} I_1 I_2.$$

Cum:

$$\frac{F_2}{F_1 + F_2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{19 - 12\sqrt{2}} = \frac{1}{19 - 12\sqrt{2}},$$

$$I_1 I_2 = OM_1 + OM_2 - r_1 - r_2 = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3)a}{3}$$

rezultă din (1):

$$I_3 I_1 = \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3)a}{3(19 - 12\sqrt{2})}.$$

In punctul I_3, astfel determinat, lucrează o forţă, $\overline{F}_3 = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$, de sens opus cu $\overline{F}$, de mărime:

$$F_3 = \frac{k\pi(19 - 12\sqrt{2})a^2}{12}.$$

Trebue să compunem acum aceste forţe $\overline{F}_3$ şi $\overline{F}$, paralele şi opuse. Punctul de aplicaţie I, a rezultantei lor se află evident la stânga lui O pe $I_3 O$, astfel aşezat ca să avem:

$$\frac{IO}{F_3} = \frac{II_3}{F} = \frac{OI_3}{F - F_3}.$$

De aci deducem:

$$(2) \qquad IO = \frac{F_3}{F - F_3} OI_3.$$

Cum:

$$\frac{F_3}{F - F_3} = \frac{19 - 12\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{12}{12\sqrt{2} - 7} = \frac{19 - 12\sqrt{2}}{12\sqrt{2} - 7},$$

$$OI_3 = OI_1 - I_3 I_1 = OM_1 - r_1 - I_3 I_1 =$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{(2-\sqrt{2})a}{2} - \frac{(3\sqrt{2} + \sqrt{3} - 3)a}{3(19 - 12\sqrt{2})} =$$

$$\frac{(90\sqrt{2} - \sqrt{3} - 126)a}{3(19 - 12\sqrt{2})},$$

atunci (2) devine:

$$(3) \qquad IO = \frac{(90\sqrt{2} - \sqrt{3} - 126)a}{3(12\sqrt{2} - 7)}.$$

Astfel poziția I a centrului de greutate cerut, este determinat de relația (3).

Altă metodă. Putem folosi *teorema momentelor:* Fie I centrul de greutate, unde vom presupune că lucrează o forță egală și de sens contrar, ca rezultanta forțelor paralele $\bar{F}_1$, $\bar{F}$, $\bar{F}_2$, această forță este mare cât, $\bar{F} - \bar{F}_1 - \bar{F}_2$.

Valorile acestei forțe, după cum le-am calculat în prima metodă sunt:

$$F_1 = \frac{k\pi(3-2\sqrt{2})a^2}{2},\quad F = k\pi a^2,\quad F_2 = \frac{k\pi a^2}{12},$$

$$F - F_1 - F_2 = k\pi\left(1 - \frac{3-2\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{12}\right)a^2 = \frac{k\pi(12\sqrt{2}-7)a^2}{12}.$$

Aceste patru forțe făcându-și echilibru, suma momentelor în raport cu un punct oare care, de exemplu O, este zero.

Avem astfel:

$$(1)\quad F_1 \cdot OI_1 - (F - F_1 - F_2)\,OI - F_1 \cdot OI_2 = 0.$$

Observăm însă, că avem:

$$OI_1 = OM_1 - r_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{(2-\sqrt{2})a}{2} = (\sqrt{2}-1)a$$

$$OI_2 = OM_2 - r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Inlocuind în (1) aceste valori, precum și valoriie lui F_1, $F - F_1 - F_2$, F_2 și simplificând prin $\frac{k\pi a^2}{2}$ găsim:

$$(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)a - \frac{12\sqrt{2}-7}{6}OI - \frac{1}{6}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3} = 0.$$

De aci deducem:

$$OI = \left(5\sqrt{2} - 7 - \frac{\sqrt{3}}{18}\right)\cdot\frac{6}{12\sqrt{2}-7}a = \frac{(90\sqrt{2}-\sqrt{3}-126)a}{3(12\sqrt{2}-7)}.$$

Poziția centrului de greutate I, cerut, este astfel determinată.

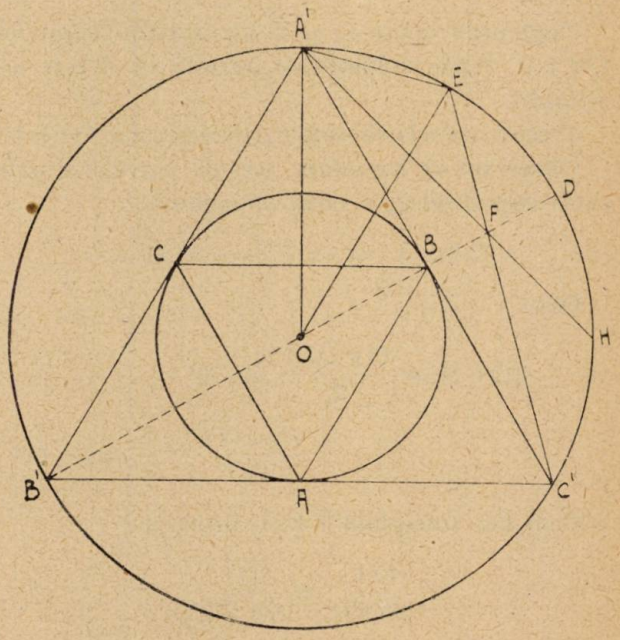
Observare, Au încercat să soluționeze problema, dar au comis greșeli, d-nii: *Arganini Victor, Dănculescu Gr. Virgiliu, Dimitriu At. Ioan, Drăguț G. Vasile, Gheorghiu Alexandru, Ionescu-Țiu D. C-tin, Marinaș Marin, Murăroiu I.* (Brașov), *Nichiforescu Gh. Gh., Pantu Z. Ion, Patega T. Ion, Râmniceanu Cristian, Roman I. Ioan, Savin C. Ioan, Sirchis I., Sprinceană Gheorghe. Stan I. Aurelian* și *Vlad I. Aurelian.*

747. — *In cercul* O *de rază* $r = 2\,m$, *se înscrie triunghiul echilateral* ABC. *Tangentele în punctele* A, B, C *formează triunghiul* A'B'C'. *Dreapta* OB *întâlnește cercul* A'B'C' *în* D. *Fie* E *mijlocul arcului* DA'. *Dreapta* C'E întâlnește *pe* OD *în* F. *Să se calculeze:*

1. Lungimea segmentului FE.

2. Să se arate că patrulaterul OFEA' *este inscriptibil, să se cnlculeze suprafața lui și lungimea lui* OF.

I. MURAROIU.



1. Ne fixăm atenția asupra triunghiului FEO. Unghiurile lui sunt:

$$\widehat{EOF} = 30^0,\quad \widehat{EFO} = \frac{\text{măs. }\overset{\frown}{C'D} + \text{măs. }\overset{\frown}{EA'B'}}{2} = \frac{60^0 + 150^0}{2} = 105^0,$$

rezultă, că:

$$\widehat{FEO} = 45^0.$$

Din triunghiul F E O, deducem:

$$(1) \qquad \frac{FE}{\sin 30^0} = \frac{OE}{\sin 105^0}.$$

Dar:

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}, \quad \sin 105^0 = \sin 45^0 \cos 30^0 + \sin 30 \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1), \quad OE = 2r = 4m,$$

rezultă din (1):

$$(2) \qquad FE = \frac{8m}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = 2m(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

2. In patrulaterul O F E A'.

$$\widehat{A'OF} = 60^0, \quad \widehat{A'EF} = 120^0.$$

Unghiurile opuse O şi E ale acestui patrulater O F E A' fiind suplimentare, rezultă că el este inscriptibil.

Trecem acum la suprafaţa patrulaterului O F E A'.

Observăm că suprafaţa acestui patrulater este suma suprafeţelor, a două triunghiuri.

$$(3) \qquad s(OFEA') = s(OFE) + s(OEA')$$

Dar:

$$(4) \qquad s(OFE) = \frac{OE \cdot OF}{2} \sin 30^0 = \frac{4m \cdot OF}{2} \cdot \frac{1}{2} = m \cdot OF.$$

Cum din triunghiul F E O, deducem:

$$\frac{OF}{\sin 45^0} = \frac{DE}{\sin 105^0}$$

$$(5) \quad \therefore OF = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} 4m}{\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})} = \frac{8m}{1+\sqrt{3}} = 4m(\sqrt{3}-1),$$

atunci (4) devine:

$$(6) \qquad s(OFE) = 4(\sqrt{3}-1)\, m^2.$$

Tot astfel, putem calcula suprafaţa triunghiului O E A', avem:

$$(7) \qquad s(OEA') = \frac{OE \cdot OA'}{2} \sin 30^0 = \frac{4m \cdot 4m}{2} \cdot \frac{1}{2} = 4\, m^2.$$

Inlocuind în (4), valorile din (6) şi (7), găsim:

$$s(OFEA') = 4\sqrt{3}\, m^2.$$

Avem astfel suprafaţa patrulaterului cerut. De asemenea lungimea lui O F, o evem calculată în relaţia (5).

Soluţii bune date de d-nii: *Arganini Victor* (lic. Piteşti), *Bâcicov Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov Victor* (lic. Tighina), *Bratoşin Radu* (Braşov), *Carp Ig.* (Chişinău), *Cercel St. Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Dimitriu At. Ion* (absolvent, Galaţi), *Drăguţ G. Vasile* (lic. Târgovişte), *Gheorghiev N.* (Bolgrad), *Ionescu P. Haralamb.* (lic. Oltenita), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (absolvent, lic. milit., Craiova), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Negrea A. Mircea-Leonte* (lic. Brăila), *Nichiforescu Gh.* (lic. Internai, Iaşi), *Panţu Z. Ion* (bacalaureat, Bucureşti), *Petrovici D.* (lic. Câmpina), *Popescu O. Ion* (lic. Calafat), *Roman I. Ion* (absolvent, Bucureşti). *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (Şc. Politechnică, Bucureşti), *Ţiucra Mircea* (lic. Timişoara) şi *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

A mai trimes soluţie, d-l: *Almăjan Petru* (absolvent, Caransebeş).

Observări. 1. D-l *Petrovici D.* (lic, Câmpina), a dat şi o bună soluţie analitică.

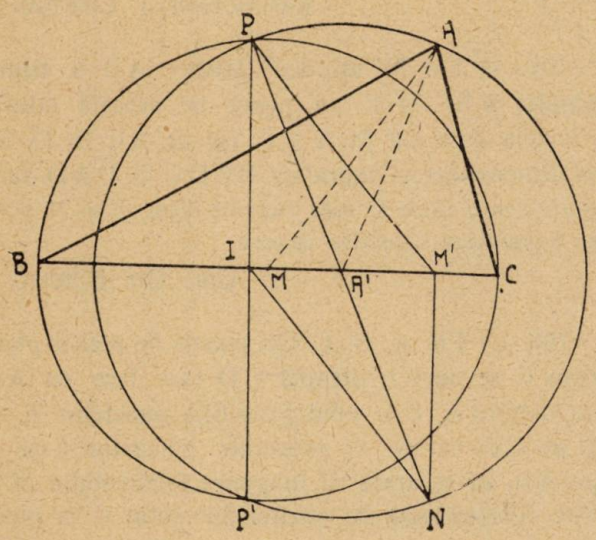
2. D-l *Ionescu P. Haralambie* (lic. Oltenita), a dat o generalizare pe care o s'o publicăm ca notă.

3. S'au primit şi multe solutiuni greşite (11), pe care nu le menţionăm. Aceste greşeli provin din lipsa de atenţie, şi a unui control riguros la fiecare pas.

748. — *Se dă triunghiul* A B C. *Fie* A' *şi respectiv picioarele bisectoarei şi medianei ce pleacă din vârful* A *pe* B C. *Din* M *ca centru şi cu o rază* M B *se descrie un cerc; din* A' *ca centru şi cu* A A' *ca rază se descrie un alt cerc, care tae pe primul în* P *şi* P'. *Se uneşte* P *cu* P' *şi fie* I *locul unde* P P' *tae pe* B C. *Se uneşte apoi* P *cu* A'. *Dreapta* P A' *întâlneşte cercul* A' *în* N. *Să se arate că figura* I P M_1 N *este un paralelogram,* M_1 *fiind piciorul perpendicularei din* N *pe* B C.

AL. ZAMIRESCU-PITESTI.

P P′ fiind coarda comună a cercurilor M și A′, este perpendiculară pe linia centrelor B C.



Acum observăm că triunghiurile dreptunghice P I A′ și A′ M_1 N, au ipotenuzele A′ P = A′ N, ca raze în cercul A′ și unghiurile din A′ egale ca opuse la vârf, rezultă că aceste triunghiuri sunt egale și deci;

$$P\,I = M\,N_1.$$

Aceste laturi egale fiind și paralele, urmează că patrulaterul I P M_1 N are două laturi egale și paralele, este deci un paralelogram.

Soluții date de n-nii: *Bâcicov P. Boris* (lic. Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina). *Bratoșin Radu* (Satulung-Brașov), *Carp Ignat* (absolvent, Chișinău), *Ciancilian Agop* (Brașov), *Constantinescu N. Stoian* (lic. Botoșani), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Dimitriu A. Ioan* (absolvent, Galați), *Drăgaț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Mihalcea Emil* (student), *Nichiforescu Gh.* (lic. Internat, Iași), *Petrică Ioan* (Cluj), *Roman I. Ioan* (Șc. Polit., București), *Savin C. Ioan* (lic. milit., Iași), *Secăroiu D-tru* (absolvent), *Sirchis I.* (lic. Tighiua), *Sprinceană Gheorghe* (Șc. Polit., București), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara) și *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

Au mai trimes soluții d-nii: *Almăjan Petru* (absolvent, Caransebeș) și *Murăroiu I.* (lic. Brașov).

Observare. D-nii: *Coșniță Cezar* (Bârlad) și *Dănciulescu Gr. Virgil* (Craiova), observă că problema are date prea multe, de aceia propun următorul enunț, mai simplu:

„Două cercuri, A′ și M se tae în P′ și P. Dreapta P P′ tae linia centrelor în I. Fie M_1 proecția punctului N diametral opus lui P, în cercul A′, pe linia centrelor. Figura I P M_1 N este un paralelogram“.

751*. — *Să se rezolve ecuația;*

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2-b^2}}{a-b\,i}\right)^n-\left(\frac{x-\sqrt{x^2-a^2-b^2}}{a+b\,i}\right)^n=0,$$

unde, $i=\sqrt{-1}$.

V. ALACI

Ecuația dată se poate scri:

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2-b^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2-b^2}}\right)^n=\frac{a-b\,i}{a+b\,i}.$$

Inmulțind cu conjugata numitorului ambii termeni ai primei fracții, avem:

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2-b^2})^{2n}}{(a^2+b^2)^n}=\left(\frac{a-b\,i}{a+b\,i}\right)^n.$$

Simplificând numitorii cu $(a+b\,i)^n$, și extrăgând rădăcina de ordinul $2n$, obținem:

$$x+\sqrt{x^2-a^2-b^2}=(a-b\,i)\left(\cos\frac{2k\pi}{2n}+i\sin\frac{2k\pi}{2n}\right)$$

$$=(a-b\,i)\,e^{\frac{ik\pi}{n}}\qquad(k=0,\,1,\,2,\ldots 2n-1)$$

$$\therefore\quad\sqrt{x^2-a^2-b^2}=(a-b\,i)\,e^{\frac{ik\pi}{n}}-x.$$

Ridicând la patrat și simplificând pe x^2, avem:

$$-(a^2+b^2)=(a-b\,i)^2\,e^{\frac{2ki\pi}{n}}-2(a-b\,i)\,e^{\frac{ki\pi}{n}}x.$$

Impărțind ambii membrii cu, $2(a-b\,i)\,e^{\frac{ki\pi}{n}}$, obținem:

$$x=\frac{(a-b\,i)\,e^{\frac{ik\pi}{n}}+(a-b\,i)\,e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2}$$

sau:

$$(1)\qquad x=a\,\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2}+b\,\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2i}$$

In virtutea formulelor lui *Euler:*

$$\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}=\cos\alpha,\qquad\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}=\sin\alpha,$$

relațiunea (1) devine:

$$(2)\qquad x=a\cos\frac{k\pi}{n}+b\sin\frac{k\pi}{n},\qquad(k=0,\,1,\,2,\ldots 2n-1)$$

Acestea sunt cele n rădăcini ale ecuației date. Observăm că n rădăcini, acelea ce corespund pentru:

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1,$$

sunt egale și de semne contrare cu celelalte n rădăcini, ce corespund pentru, $k = n,\ n+1, \ldots (2n-1)$.

Observări. 1. D-l *Roman I. Ioan* (student), întrebuințând o altă metodă, a găsit toate rădăcinele.

2. D-nii *Bâcicov P. Boris*, *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina) și *Sirchis I.* (lic. Tighina), reușesc a pune ecuația sub forma:

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2-b^2}}{a-bi}\right)^{2n}=1.$$

și conchid că rădăcinele sunt de forma (1), în virtutea articolului *„O clasă de ecuațiuni algebrice, cu rădăcini trigonometrice"*, (R M T., an. VIII, No. 9), dar nu e just, fiindcă în acel articol se rezolvă problema inversă.

3. D-nii: *Cristescu C. Ioan* și *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați) și *Sprinceană Gheorghe* (absolvent, Galați), au găsit toate rădăcinele, dar nu sub forma (1).

4. Cu toate că ecuația are $2n$, rădăcini, cei mai mulți rezolvitori au găsit că ea are o singură rădăcină, anume: — a. Inscrim aci și pe acești rezolvitori, d-nii: *Arganini Victor* (lic. Pitești), *Cioclov Gheorghe* (lic. T.-Severin), *Ciupe Aëtius* (lic. Bistrița), *Chirilă S. Ioan* (lic. Milit. Iași), *Cosnița Cezar* (Bârlad), *Cuțui I. Lucian*, *Dorobanțiu Ioan* (Șc. Polit. Timișoara), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), *Gavrilescu V.* (lic. Brașov), *Gheorghiev N.* (Bolgrad), *Ghisoiu I. Petrică* (lic. Spiru-Haret, București), *Nicolae Grigore* (Sublocot. Șc. Milit. Aeronautică), *Ignat Carp* (Chișinău), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. milit., Craiova), *Iotta D. M.* (lic. T.-Severin), *Licev Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Micula O.* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihalcea Emil* (Buzău), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Negrea A. Leonte* (lic. Brăila), *Panțu Z. Ion* (bacalaureat, București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Petrovici D.* (lic. Câmpina). *Râmniceanu I. Cristian* (lic. milit., Iași), *Saur Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Scarlat D.* (lic. Câmpina), *Scurtu A. Nicolae* (Brașov), *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), *Stan I. Aurelian* (lic. milit., Iași), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara) și *Vâlceanu N. Iustin* (lic. Tg.-Jiu).

PROBLEME PROPUSE

387[1]). — Se cer patratele perfecte de forma $abac$ știind că ac și bc sunt patrate perfecte.

I. ILIUȚĂ-DABULENI.

795. — Se cere restul împărțirei numărului:

$$N = 17^{18} - 289^{36} + 4993^{54} + 84881^{72}.$$

SAVIN C. IOAN

796. — Să se afle suma produselor două câte două a primelor n numere divizibile prin 13.

RAMNICEANU I. CRISTIAN

797. — Fie M mijlocul laturei AB a triunghiului ABC și E un punct pe această latură. Paralela dusă din M la EC tae pe AC în D. Să se demonstreze că suprafața BEDC și EAD sunt echivalente când E este cuprins între A și B și să se examineze celelalte cazuri.

COL. GH. BUICLIU

798. — Fie A, B, C trei puncte în același plan. Prin C se duce o dreaptă CD care face cu AB un unghiu α. I, L fiind proecțiile punctelor A și B pe CD, iar M, N proecțiile punctelor I și L pe AB, să se arate că lungimea segmentului MN este independentă de poziția punctului C în plan.

JUSTIN N. VALCEANU

799. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x^2+y^2+z^2=38 \\ x^4+y^4+z^4=722. \end{cases}$$

CEZAR COSNITA

800. — Se cere maximul expresiei:

$$E = xt - yz,$$

știind că variabilele reale $x,\ y,\ z,\ t$ satisfac relațiile:

$$x^2+y^2=A, \qquad z^2+t^2=B.$$

V. ALACI

801. — Să se stabilească relațiunile:

$$s^{3n} = \prod r_a^{2n} \operatorname{tg}^n \frac{A}{2}$$

$$r^{3n} = \prod \operatorname{tg}^{2n} \frac{A}{2} \cdot r_a^n$$

$$s^n \sum r_a^n \operatorname{tg}^n \frac{B}{2} \operatorname{tg}^n \frac{C}{2} = r^n \sum \operatorname{tg}^n \frac{A}{2} r_b^n r_c^n = 3 \prod r_a^n \operatorname{tg}^n \frac{A}{2}.$$

I. MURAROIU

1) Problema 387 din numărul trecut, fiind cuprinsă în problema 319, vol. III, p. 185, o anulăm, publicând sub același număr, problema de față.

INFORMAȚIUNI

Recomandăm călduros corespondenților noștri, cartea „*Gândirea Matematică*“ a d-lui profesor universitar *Petre Sergescu.*

— —

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

— —

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

— —

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

— —

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

— —

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs,* de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs,* se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvitor înscris pentru *Concurs.*

— —

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Rugăm a se trimete urgent costul abonamentului pentru anul 1929 — 1930.

Cu regret anunțăm că nu vom putea trimete No. 2, acelor ce nu vor fi în curent cu plata abonamentului.

In caz de neabonare, rugăm a restitui No. 1.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

CARTEA ROMÂNEASCĂ

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 APRRILIE 1929 NO. 2

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CEZAR COȘNIȚĂ. CALCULUL ELEMENTELOR UNUI TRIUNGHIU IN FUNCTIE DE INALTIMI.
2. NOTE MATEMATICE, 4, 5, 6.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 702, 755, 757, 758, 759, 765, 768 773.
5. PROBLEME PROPUSE.
6 INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

ANUL IX — No. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1929

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

CALCULUL ELEMENTELOR UNUI TRIUNGHIU IN FUNCȚIE DE INALȚIMI

de CEZAR COSNITA

Fie A B C un triunghiu oarecare cu înălțimele α, β, γ și laturile x, y și z; însemnăm picioarele înălțimelor cu M, N, P și avem:

$$\left.\begin{array}{l} BM = \sqrt{z^2 - \alpha^2} \\ CM = \sqrt{y^2 - \alpha^2} \end{array}\right\} \quad \therefore \sqrt{y^2 - \alpha^2} + \sqrt{z^2 - \alpha^2} = x.$$

In mod analog deducem alte două ecuații. Avem de rezolvat, deci, sistemul:

$$I \begin{cases} \sqrt{y^2 - \alpha^2} + \sqrt{z^2 - \alpha^2} = x \\ \sqrt{z^2 - \beta^2} + \sqrt{x^2 - \beta^2} = y \\ \sqrt{x^2 - \gamma^2} + \sqrt{y^2 - \gamma^2} = z \end{cases}$$

Ridicând odată la patrat, avem:

$$II \begin{cases} y^2 + z^2 - x^2 - 2\alpha^2 = -2\sqrt{(y^2 - \alpha^2)(z^2 - \alpha^2)} \\ z^2 + x^2 - y^2 - 2\beta^2 = -2\sqrt{(z^2 - \beta^2)(x^2 - \beta^2)} \\ x^2 + y^2 - z^2 - 2\gamma^2 = -2\sqrt{(x^2 - \gamma^2)(y^2 - \gamma^2)}. \end{cases}$$

Ridicând din nou la patrat și aranjând termenii, obținem sistemul:

$$III \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4\alpha^2x^2 = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4\beta^2y^2 = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4\gamma^2z^2 = 0 \end{cases}$$

Scăzând ecuația a doua din prima și pe a treia din a doua, deducem:

$$\alpha x = \beta y; \quad \beta y = \gamma z,$$

de unde:

$$x = \frac{\beta y}{\alpha}; \quad z = \frac{\beta y}{\gamma}.$$

Introducând aceste valori în ecuația întâia a sistemului III, obținem următoarea ecuație în y.

$$\frac{\beta^4 y^4}{\alpha^4} + y^4 + \frac{\beta^4 y^4}{\gamma^4} - \frac{2\beta^2 y^4}{\alpha^2} - \frac{2\beta^2 y^4}{\gamma^2} - \frac{2\beta^4 y^4}{\gamma^2 \alpha^2} + 4\beta^2 y^2 = 0$$

$$y^4(\beta^4\gamma^4 + \gamma^4\alpha^4 + \alpha^4\beta^4 - 2\alpha^2\beta^2\gamma^4 - 2\alpha^4\beta^2\gamma^2 - 2\alpha^2\beta^4\gamma^2) + 4\alpha^4\beta^2\gamma^4 y^2 = 0.$$

Simplificând cu y^2 — care ne dă soluția banală: $y = 0$ — și descompunând în factori suma din paranteză, avem:

$$-y^2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\,\Pi\,(\alpha\beta + \beta\gamma - \gamma\alpha) = -4\alpha^4\beta^2\gamma^4$$

de unde:

$$y = \frac{2\alpha^2\beta\gamma^2}{\sqrt{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\,\Pi\,(\alpha\beta + \beta\gamma - \gamma\alpha)}}.$$

(Radicalul trebue luat cu semnul +, de oarece laturile sunt considerate ca pozitive).

Prin permutări circulare, deducem și pe x, z:

$$x = \frac{2\alpha\beta^2\gamma^2}{\sqrt{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\,\Pi\,(\alpha\beta + \beta\gamma - \gamma\alpha)}}$$

$$z = \frac{2\alpha^2\beta^2\gamma}{\sqrt{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\,\Pi\,(\alpha\beta + \beta\gamma - \gamma\alpha)}}.$$

$$\therefore$$

Să calculăm acum diferite elemente, lineare sau unghiulare, ale triunghiului, în funcție de înălțimi.

Vom nota însă mai întâi, așa cum se obișnuește, laturile prin: a, b, c iar înălțimele prin h_a, h_b, h_c.

Aria S a triunghiului se deduce din relațiile cunoscute:

$$S = \frac{a\,h_a}{2} = \frac{b\,h_b}{2} = \frac{c\,h_c}{2}.$$

Găsim:

$$(1)\quad S=\frac{h_a^2\,h_b^2\,h_c^2}{\sqrt{(h_a h_b+h_b h_c+h_c h_a)\,\Pi\,(h_a h_b+h_b h_c-h_c h_a)}}$$

Raza R a cercului circumscris este egală cu:

$$(2)\quad R=\frac{a\,b\,c}{4\,S}=$$

$$\frac{2\,h_a^3\,h_b^3\,h_c^3}{(h_a h_b+h_b h_c+h_c h_a)\,\Pi\,(h_a h_b+h_b h_c-h_c h_a)}.$$

Semiperimetrul p se deduce din:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=h_a h_b h_c\sqrt{\frac{h_a h_b+h_b h_c+h_c h_a}{\Pi\,(h_a h_b+h_b h_c-h_c h_a)}}.$$

Sinusurile şi cosinusurile unghiurilor se deduc din relaţiile:

$$\sin A=\frac{a}{2R};\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$$

şi anume:

$$(4)\quad \sin A=\frac{\sqrt{(h_a h_b+h_b h_c+h_c h_a)\,\Pi\,(h_a h_b+h_b h_c-h_c h_a)}}{2\,h_a^2\,h_b\,h_c}$$

$$(5)\quad \cos A=\frac{h_c^2\,h_a^2+h_a^2\,h_b^2-h_b^2\,h_c^2}{2\,h_a^2\,h_b\,h_c},$$

şi în mod analog pentru celelalte unghiuri.

Raza cercului înscris:

$$(6)\quad r=\frac{S}{p}=\frac{h_a h_b h_c}{h_a h_b+h_b h_c+h_c h_a}.$$

Razele cercurilor exînscrise:

$$r_a=\frac{S}{p-a};\quad r_b=\frac{S}{p-b};\quad r_c=\frac{S}{p-c};$$

$$p-a=\frac{h_a h_b h_c\,(h_c h_a+h_a h_b-h_b h_c)}{\sqrt{(h_a h_b+h_b h_c+h_c h_a)\,\Pi\,(h_a h_b+h_b h_c-h_c h_a)}}$$

deci:

$$(7)\quad r_a=\frac{h_a h_b h_c}{h_c h_a+h_a h_b-h_b h_c};$$

$$r_b=\frac{h_a h_b h_c}{h_a h_b+h_b h_c-h_c h_a};\quad r_c=\frac{h_a h_b h_c}{h_b h_c+h_c h_a-h_a h_b}.$$

Sinusurile şi cosinusurile unghiurilor pe jumătate se deduc din relaţiile:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{r_a-r}{4R}};\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{r_b+r_c}{4R}},$$

găsim:

$$(8)\quad \sin\frac{A}{2}=$$

$$\frac{1}{2\,h_a}\sqrt{\frac{(h_a h_b+h_b h_c-h_c h_a)\,(h_b h_c+h_c h_a-h_a h_b)}{h_b\,h_c}}$$

$$(9)\quad \cos\frac{A}{2}=$$

$$\frac{1}{2\,h_a}\sqrt{\frac{(h_a h_b+h_b h_c+h_c h_a)\,(h_c h_a+h_a h_b+h_b h_c)}{h_b\,h_c}}.$$

Tangentele unghiurilor pe jumătate se deduc din:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\ldots\text{ etc.}$$

$$(10)\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(h_a h_b+h_b h_c-h_c h_a)\,(h_b h_c+h_c h_a-h_a h_b)}{(h_c h_a+h_a h_b-h_b h_c)\,(h_a h_b+h_b h_c+h_c h_a)}}$$

Bisectoarele interioare se deduc din formula:

$$I_a=\frac{2\sqrt{p\,(p-a)\,b\,c}}{b+c}$$

şi analoagele. Rezultă:

$$(11)\quad I_a=$$

$$\frac{2\,h_a\,h_b\,h_c\sqrt{h_b\,h_c}}{\sqrt{(h_a h_b+h_b h_c-h_c h_a)\,(h_b h_c+h_c h_a-h_a h_b)}\,(h_b+h_c)}$$

Bisectoarele exterioare se deduc din formula:

$$I'_a=\frac{2}{b-c}\sqrt{(p-b)\,(p-c)\,b\,c}$$

şi analoagele:

$$(12)\quad I'_a=$$

$$\frac{2\,h_a\,h_b\,h_c\sqrt{h_b\,h_c}}{\sqrt{(h_a h_b+h_b h_c+h_c h_a)\,(h_c h_a+h_a h_b-h_b h_c)}\,(h_c-h_b)}$$

Segmentele de bisectoare cuprinse între vârfuri şi centrul cercului înscris:

(13) $$J_a = \sqrt{\frac{b\,c\,(p-a)}{p}} = \frac{2\,h_a^2\,h_b\,h_c\,\sqrt{h_b\,h_c}}{(h_a\,h_b + h_b\,h_c + h_c\,h_a)\,\sqrt{(h_a\,h_b + h_b\,h_c - h_c\,h_c)\,(h_b\,h_c + h_c\,h_a - h_a\,h_b)}}$$

Segmentele de bisectoare, cuprinse între centrul cercului înscris şi picioarele lor:

(14) $$J'_a = \frac{a}{b+c}\sqrt{\frac{b\,c\,(p-a)}{p}} = \frac{2\,h_a\,h_b^2\,h_c^2\,\sqrt{h_b\,h_c}}{(h_b + h_c)\,(h_a\,h_b + h_b\,h_c + h_c\,h_a)\,\sqrt{(h_a\,h_b + h_b\,h_c - h_c\,h_a)\,(h_b\,h_c + h_c\,h_a - h_a\,h_b)}}$$

Simedianele triunghiului:

$$S_a = \frac{b\,c}{b^2 + c^2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2}$$

şi celelalte două analoage:

(15) $$S_a = \frac{2\,h_a\,h_b^2\,h_c^2}{h_b^2 + h_c^2} \times$$

$$\sqrt{\frac{2\,h_a^2\,(h_b^2 + h_c^2) - h_b^2\,h_c^2}{(h_a\,h_b + h_b\,h_c + h_c\,h_a)\,\text{II}\,(h_a\,h_b + h_b\,h_c - h_c\,h_a)}}.$$

Medianele se deduc din:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\,(b^2 + c^2) - a^2} \ldots \text{etc.};$$

(16) $$m_a = h_a\,h_b\,h_c \times$$

$$\sqrt{\frac{2\,h_a^2\,(h_b^2 + h_c^2) - h_b^2\,h_c^2}{(h_a\,h_b + h_b\,h_c + h_c\,h_a)\,\text{II}\,(h_a\,h_b + h_b\,h_c - h_c\,h_a)}}.$$

Unghiul lui *Brocard* se deduce din:

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C;$$

(17) $$\operatorname{cotg}\omega = \frac{h_a^2\,h_b^2 + h_b^2\,h_c^2 + h_c^2\,h_a^2}{\sqrt{(h_a\,h_b + h_b\,h_c + h_c\,h_a)\,\text{II}\,(h_a\,h_b + h_b\,h_c - h_c\,h_a)}}.$$

La fel am putea calcula — în funcţie de înălţimi — distanţele dintre diferite puncte remarcabile ale triunghiului.

Deocamdată mă opresc aici, căci numeroasele relaţii pe cari le-am stabilit pot servi la construirea diferitelor relaţiuni remarcabile între elementele triunghiului, îmbogăţindu-se astfel domeniul relaţiilor trigonometrice aşa de mult cultivat astăzi.

* * *

Observare. Metoda pe care am întrebuinţat-o pentru a calcula elementele triunghiului, în funcţie de înălţimi, este cam complicată. Motivul care m'a făcut s'o utilizez este că am căutat să am prilejul de a rezolva sistemul I, care se prezintă sub o formă aşa de remarcabilă şi care e susceptibil de o generalizare.

S'ar putea calcula, printr'o metodă mai simplă, elementele triunghiului în funcţie de înălţimi.

Aşa, de exemplu, raza cercului înscris se poate deduce din relaţia cunoscută:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \quad \therefore \quad r = \frac{h_a\,h_b\,h_c}{h_a\,h_b + h_b\,h_c + h_c\,h_a}.$$

Razele cercurilor exînscrise se deduc rezolvând sistemul format de relaţiile cunoscute:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} = \frac{2}{h_c}; \quad \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_a}; \quad \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_a} = \frac{2}{h_b}.$$

Adunăm aceste relaţii, împărţim suma la 2, scădem apoi, din aceasta, pe fiecare din aceste relaţii şi avem:

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \ldots \quad \therefore \quad r_c = \frac{h_a\,h_b\,h_c}{h_b\,h_c + h_c\,h_a - h_a\,h_b}$$

Aria triunghiului se deduce din:

$$S = \sqrt{r \cdot r_a\,r_b\,r_c}$$

şi aşa şi celelalte relaţii pe cari le-am stabilit.

NOTE MATEMATICE

4. *Asupra unor ecuaţii de gradul al 2-lea.*

Fie ecuaţiile:

$$a\,x^2 \pm b\,x - (a+b) = 0$$

$$a\,x^2 \pm (a+b)\,x + b = 0$$

$$(a+b)\,x^2 \pm a\,x - b = 0,$$

cu realizanţii respectivi R_1, R_2 şi R_3.

Avem:

$$R_1 = b^2 + 4a(a+b) = (b+2a)^2$$
$$R_2 = (b+a)^2 - 4ab = (b-a)^2$$
$$R_2 = b^2 + 4a(a+b) = (a+2b)^2.$$

De aci deducem următoarea metodă pentru găsirea unor ecuații de gradul al 2-lea al căror realizanți să fie un patrat perfect.

Dacă coeficientul lui x^2 și termenul liber nu sunt de același semn, putem lua pe unul din ei egal cu celalt plus coeficientul lui x.

In caz contrar luăm coeficientul lui x egal cu suma celorlalți doi, lucrând în amândouă cazurile numai cu valoarea absolută a coeficenților. Bineînțeles că de această proprietate nu se bucură toate ecuațiile de gradul al 2-lea al căror realizant e un patrat perfect.

JUSTIN N. VALCEANU

5. *Generalizarea problemei 448.*

Acestei probleme, a cărei soluție e dată în R. M. T., vol. VII, pag. 49, îi dau următoarea generalizare.

Intr'un triunghiu ABC *perpendiculara ridicată din* B *pe* BC, *tae latura* AC *în* D, *așa fel ca* $k \cdot \overline{AD} = \overline{AC}$. *Să se arate că în acest caz laturile triunghiului dat sunt legate prin relația:*

(1) $$(k+1)(\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2) = (k-1)\overline{BC}^2$$

sau;

(2) $$(k-1)(\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2) = (k+1)\overline{BC}^2.$$

Urmând aceiași cale ca cea dată în R. M. T., vol. VII, și considerând cele două cazuri posibile ajungem la relațiile (1) și (2).

JUSTIN N. VALCEANU

6, *Generalizarea problemei 747.*

In cercul O *de rază r, se înscrie un poligon regulat* ABC...KL. *Tangentele în punctele* A, B, C,... K, L *formează poligonul* A'B'C'...K'L'. *Dreapta* OB *întâlnește cercul* A'B'C'...K'L' *în* N. *Fie* M *mijlocul arcului* NA'. *Dreapta* L'M *tae pe* OB *în* P. *Să se calculeze.*

1°. Lungimea segmentului PM.

2°. Să se arate că patrulaterul OPMA' *este inscriptibil. Să se calculeze suprafața lui, și lungimea lui* OP.

1°. Fie:

$$\sphericalangle NOA' = n^0.$$

Raza R a cercului circumscris poligonului A'B'C'... K'L' devine:

$$R = OA' = \frac{r}{\sin(90^0 - n^0)}$$

$$\sphericalangle NOM = \frac{n^0}{2} \quad \therefore \quad \sphericalangle PMO = 90^0 - \frac{3n^0}{4}$$

$$\therefore \quad \sphericalangle MPO = 90^0 + \frac{n^0}{4}$$

(1) $$\therefore \quad PM = \frac{\frac{r}{\sin(90^0 - n^0)} \sin\left(\frac{n^0}{2}\right)}{\sin\left(90^0 + \frac{n^0}{4}\right)}.$$

2°. Pentru ca patrulaterul OPMA' să fie inscriptibil trebue să avem:

(2) $$\sphericalangle POA' + \sphericalangle PMA' = 180^0$$

$$\sphericalangle POA' = n^0; \quad \sphericalangle PMA' = \frac{\text{arcul } F'A'}{2}$$

$$\text{arcul } F'A' = 360^0 - (\text{arc } F'N + \text{arc } NA').$$

cum:

$$\text{arc } F'N = \text{arc } NA' = n^0,$$

avem:

$$\sphericalangle PMA' = \frac{360^0 - 2n^0}{2} \quad \therefore \quad \sphericalangle PMA' = 180^0 - n^0$$

înlocuind în (2) avem:

$$\sphericalangle POA' + \sphericalangle PMA' = n^0 + (180^0 - n^0) = 180^0,$$

ceiace denotă că patrulaterul OPMA' este inscriptibil:

(3) $$S(MPO) = \frac{\frac{r^2}{[\sin(90^0 - n)]^2} \sin\left(\frac{n^0}{2}\right) \sin\left(90^0 - \frac{3n^0}{4}\right)}{2 \sin\left(90^0 - \frac{n^0}{4}\right)}$$

(4) $$S(MOA') = \frac{\frac{r^2}{[\sin(90^0 - n^0)]^2} \sin\left(\frac{n^0}{2}\right)}{2}$$

$$(5)\qquad S(OMPA') = \frac{\dfrac{r^2}{[\sin(90^0 - n^0)]^2}\sin\left(\dfrac{n^0}{2}\right)\sin\left(90^0 - \dfrac{3n^0}{4}\right)}{2\sin\left(90^0 - \dfrac{a^0}{4}\right)} + \frac{\dfrac{r^2}{[\sin(90^0 - n^0)]^2}\sin\left(\dfrac{n^0}{2}\right)}{2}$$

Dacă în (5) facem pe $n^0 = 60^0$ obţinem tocmai suprafaţa patrulaterului OEFA' din problema 747, tot astfel dacă în (1) facem pe $n^0 = 60^0$ obţinem lungimea lui FE din problema propusă:

$$(6)\qquad OP = \frac{\dfrac{r}{\sin(90^0 - n^0)}\sin\left(90^0 - \dfrac{3n^0}{4}\right)}{\sin\left(90^0 + \dfrac{n^0}{4}\right)}.$$

Unde făcând pe $n^0 = 60^0$ obţinem pe OF din problema propusă.

Notă. 1°. Afară de patrulaterul OFMA' mai sunt inscriptibile şi patrulaterele L'MA'A, L'MA'C, L'MA'D, ... L'MA'K, L'MA'L, deci numărul patrulaterelor inscriptibile afară de OPMA' este egal cu numărul unghiurilor poligonului dat ABCD...KL mai puţin unul şi anume mai puţin unghiu B căci se găseşte pe dreapta L'A' şi atunci figura L'MA'B devine un triunghiu. Patrulaterele mai sus citate sunt inscriptibile căci avem:

$$\sphericalangle L'AA' = \sphericalangle L'CA' = \sphericalangle L'DA' = \ldots$$

$$\ldots = \sphericalangle L'LA' = \frac{\text{arc } L'A'}{2}$$

cum arcul $L'A' = 2n^0$, avem:

$$\sphericalangle L'AA' = \sphericalangle L'CA' = \ldots = \sphericalangle L'LA' = n^0$$

şi în fiece patrulater ca unghiu opus acestora avem mereu unghiul $L'PA' = 180^0 - n^0$:

$$\therefore\ \sphericalangle L'AA' + \sphericalangle L'PA' = \sphericalangle L'CA' + \sphericalangle L'PA' = \ldots = \sphericalangle L'LA' + \sphericalangle L'PA' = 180^0$$

căci:

$$\sphericalangle L'AA' + \sphericalangle L'PA' = 180^0 - n^0 + n^0 = 180^0.$$

Deci patrulaterele sunt inscriptibile. Condiţiunea este ca poligonul ABC...KL să aibă un număr par de laturi. Când poligonul ABC...KL are un număr impar de laturi atunci patrulaterele inscriptibile sunt:

$$L'MA'B' \ldots L'MA'K',$$

cu două mai puţine decât numărul laturilor lui ABC...KL:

$$2^0.\qquad MA' = PM = \frac{\dfrac{r}{\sin(90^0 - n^0)}\sin\left(\dfrac{n^0}{2}\right)}{\sin\left(90^0 + \dfrac{n^0}{4}\right)}$$

$$(7)\qquad PM = \frac{\dfrac{r}{\sin(90^0 - n^0)}\sin\left(\dfrac{n^0}{2}\right)}{\sin\left(90^0 + \dfrac{n^0}{4}\right)}$$

$$(8)\qquad MA' = \frac{\dfrac{r}{\sin(90^0 - n^0)}\sin\left(\dfrac{n^0}{2}\right)}{\sin\left(90^0 - \dfrac{n^0}{4}\right)}$$

cum:

$$\sin\left(90^0 - \frac{n^0}{4}\right) = \sin\left(90^0 + \frac{n^0}{4}\right),$$

şi cum fracţiile (7) şi (8) au numărătorii egali avem:

$$MA' = PM \qquad \text{t. c. c. e. d. d.}$$

Făcând pe $n^0 = 60^0$ şi $r = 2m$ obţinem lungimea lui $EA' = FE$ din problema propusă.

3°. Fie p perimetrul patrulaterului OPMA':

$$p = MA' + PM + OP + OA'$$

$$p = \frac{2\left[\dfrac{r}{\sin(90^0 - n^0)}\sin\left(\dfrac{n^0}{2}\right)\right] + \dfrac{r}{\sin(90^0 - n^0)}\sin\left(90^0 - \dfrac{3n^0}{4}\right)}{\sin\left(90^0 + \dfrac{n^0}{4}\right)} + \frac{r}{\sin(90^0 - n^0)}.$$

Făcând pe $n^0 = 60^0$ şi $r = 2m$ şi înlocuind obţinem:

$$p = \frac{8m(2+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

perimetrul patrulaterului O F E A'.

4°. Dacă înălţimea triunghiului B C O coborîtă din B pe O C o prelungim până întâlneşte pe L' în P', atunci triunghiurile P' P B şi M A' O sunt asemenea, deci triunghiul P P' B este isoscel, căci avem:

$$\sphericalangle P'BP = \sphericalangle OBC' \quad \therefore \quad \sphericalangle P'BP = \sphericalangle NOA' = 30^0$$

$$\sphericalangle P'PB = \frac{\text{arc } MN + 180^0 - \text{arc } L'N}{2}$$

$$\text{arc } MN = \frac{n^0}{2}; \quad \text{arc } L'N = n^0$$

$$\therefore \quad \sphericalangle P'PB = 90^0 - \frac{n^0}{4},$$

dar şi:

$$\sphericalangle MA'O = \sphericalangle A'MO = 90^0 - \frac{n^0}{4}$$

$$\therefore \quad \sphericalangle P'PB = \sphericalangle PP'B = \sphericalangle MA'O = \sphericalangle A'MO = 90^0 - \frac{n^0}{4}.$$

Triunghiurile au unghiurile egale deci, sunt asemenea.

HARALAMB P. IONESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, No. 7, Martie 1929. Metodologia matematicilor (urmare) de † *N. C. Segârceanu*. Asupra unor polinoame, de *Ştefan Mușta*.

2. *Revista Universitară Matematică*, redactată de *Rodolphe Raclis*, 1(2), 1929. Cicuantenarul lui *Emile Picard*, de *Traian Lalescu*. Polinoame remarcabile şi formule sumatorii, (urmare), de *Rodolphe Raclis*. Coordonate izotrope, de *Nicolae Botea*. Schimbarea de variabile în laplacian, de *Şerban Ţiţeica*.

Cercul Revistei Universitare, şedinţele 1 — 4. Chestiuni de examen, enunţuri şi soluţiuni.

PROBLEME REZOLVATE

702*. — *Două mobile* M *şi* M' *se mişcă în mod uniform pe laturile unui unghiu* xOy (M *pe* Ox *şi* M' *pe* Oy). *Să se studieze variaţia distanţei.*

V. VALCOVICI

Fie v_1 şi v_2 respectiv, vitezele celor două mobile şi a şi b distanţele lor faţă de O origina spaţiilor, la momentul iniţial $t = 0$,

Cum într'o mişcare uniformă spaţiul creşte proporţional cu timpul, rezultă uşor din triunghiul O M M'.

$$\overline{MM'}^2 = (a + v_1 t)^2 + (b + v_2 t)^2 - 2(a + v_1 t)(b + v_2 t)\cos\alpha,$$

α fiind unghiul M O M'.

Putem scri încă:

$$(1) \qquad y = \overline{MM'}^2 = At^2 + 2Bt + C,$$

unde am notat:

$$(2) \qquad \begin{cases} A = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha \\ B = a v_1 + b v_2 - a v_2 \cos\alpha - b v_1 \cos\alpha \\ C = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \end{cases}$$

Valorile lui t care fac maxim sau minim pe $\overline{MM'}$, evident că fac maxim sau minim şi pe $\overline{MM'}^2$, şi aceste valori anulează derivata.

Vom anula deci derivata expresiei (1), avem:

$$y' = 2At + 2B = 0$$

$$\therefore \quad t = -\frac{B}{A}.$$

Cum, $A > 0$, ceea ce rezultă uşor din (2), căci:

$$v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha \geqq v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 = (v_1 - v_2)^2 > 0,$$

urmează că y', trece prin zero, dela negativ la pozitiv, şi deci y admite un minim pentru $t = -\frac{B}{A}$.

Valoarea minimă a lui $\overline{MM'}$, este deci:

$$(3) \qquad \text{minim } \overline{MM'} = \sqrt{\frac{AC - B^2}{A}}$$

Rămâne să calculăm expresia de sub radical, avem:

$$AC-B^2=(v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha)(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)$$
$$-(av_3+bv_2-av_2\cos\alpha-bv_1\cos\alpha)^2=$$
$$a^2v_2^2+b^2v_1^2-2abv_1v_2-a^2v_2^2\cos^2\alpha-b^2v_1^2\cos^2\alpha$$
$$+2abv_1v_2\cos^2\alpha=(av_2-bv_1)^2-$$
$$(av_2-bv_1)^2\cos^2\alpha=(av_2-bv_1)^2\sin^2\alpha.$$

Atunci (3) devine:

$$\text{minim } \overline{MM'}=\left|\frac{(av_2-bv_1)\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}}\right|$$

Caz particular. Dacă, $\alpha=90^0$, avem:

$$\text{minim } \overline{MM'}=\frac{|av_2-bv_1|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Soluţii parţiale date de d-nii: *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (lic. Milit. Craiova), *Sirchis I.* (lic. Tighina), *Sprinceană Gheorghe* (lic. Galaţi), *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iaşi) şi *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

Soluţii particulare şi numai în cazul când Ox, Oy sunt perpendiculare, au dat d-nii: *Almăjan Petre* (lic. Caransebeş), *Antoniu Engelmann* (Caransebeş) şi *Mihuţ Metodie* (lic. Caransebeş).

S'au primit multe soluţii greşite.

Observare. Puteam afla timpul când $\overline{MM'}$ e minim şi fără ajutorul derivatei.

In adevăr, observăm că relaţia (1) din prima soluţie se poate scri, încă:

$$\overline{MM'}^2=\frac{A^2t^2+2ABt+AC}{A}=$$
$$\frac{(At+B)^2+AC-B^2}{A}.$$

Dar, $AC-B^2$ este pozitiv, căci am văzut mai sus, că:

$$AC-B^2=(av_2-bv_1)^2\sin^2\varphi,$$

astfel că $\overline{MM_1}^2$ e minim evident, când $At+B=0$ adică pentru:

$$t=-\frac{B}{A},$$

în care caz rezultă:

$$\text{minim } \overline{MM'}=\sqrt{\frac{AC-B^2}{A}}=$$
$$\left|\frac{(av_2-bv_1)\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}}\right|.$$

755. — *Dându-se ecuaţiile:*

$$ax^2+bx+c=0,\quad a_1x^2+b_1x+c_1=0,$$

şi expresia:

$$E=(bb_1+4aa_1)(bb_1+4cc_1)-$$
$$4(ab_1+bc_1)(a_1b+b_1c),$$

se cere să se arate că:

1°. Dacă ecuaţiile au rădăcini raţionale, E *este un patrat perfect.*

2°. Dacă una din ecuaţii are rădăcini egale, E *este nul.*

ROMAN I. ION

Desfăcând parantezele, E devine:

$$(1)\quad E=b^2b_1^2+4bb_1cc_1+4aa_1bb_1+16aa_1cc_1$$
$$-4aa_1bb_1-4ab_1^2c-4a_1b^2c_1-4bb_1cc_1=$$
$$b^2b_1^2+16aa_1cc_1-4ab_1^2c-4a_1b^2c_1=$$
$$b^2(b_1^2-4a_1c_1)-4ac(b_1^2-4a_1c_1)=$$
$$(b^2-4ac)(b_1^2-4a_1c_1).$$

1°. Dacă ecuaţiile date au rădăcini raţionale, atunci avem:

$$b^2-4ac=k^2,\quad b_1^2-4a_1c_1=k_1^2,$$

k şi k_1 fiind numere raţionale, şi atunci (1), devine:

$$E=k^2k_1^2,$$

E, este deci un patrat perfect.

2°. Dacă una din ecuaţiile date are rădăcini egale, atunci:

$$b^2-4ac=0,\quad \text{sau}\quad b_1^2-4ac=0,$$

în ambele cazuri, avem:

$$E=0.$$

Soluții date de d-nii: *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Baciu Gh. Teodor*, *Brotman I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Carp Ignat* (Chișinău), *Cioclov Gheorghe* (bacalaureat), *Chirilă I. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Costăchescu V. C-tin* (Șc. milit. de Marină), *Cuțui Lucian* (lic. Pitești), *Dimitriu A. Ioan* (absolvent, Galați), *Dumitrescu Nicolae* (Șc, Polit., Timișoara), *Dumitrescu V. C-tin* (lic. Focșani), *Gheorghiev N.* (Bolgrad), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Grossu Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Mihalcea Emil* (Buzău), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Negrea A. Mircea Leonte* (lic. Brăila), *Nichiforescu Gh. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Petrovici D-tru* (student, Câmpina) *Râmniceanu I. Cristian* (lic. milit., Iași), *Savin C. Ioan* (lic. milit., Iași), *Scarlat D-tru* (Șc. Navală, Constanța), *Saur Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara), *Vâlceanu Justin* (absolvent, Tg.-Jiu) și *Zaharia O. Nicolae* (lic. Constanța).

Au mai trimes soluții d-l: *Almăjan Petru* (lic. Caransebeș), *Ionescu P. Haralamb* (Oltenița) și *Secăroiu D-tru* (absolvent).

757. — *Dacă notăm:*

$$A_k = \frac{a\cos\frac{k\pi}{3} + b\sin\frac{k\pi}{3}}{a_1\cos\frac{k\pi}{3} + b_1\sin\frac{k\pi}{3}},$$

se cere să se stabilească identitățile:

$$\sum_{k=0}^{2} A_k = 3\,\frac{a\,b_1^2 - a\,a_1^2 + 2\,a_1\,b\,b_1}{a_1\,(3\,b_1^2 - a_1^2)}$$

$$A_0A_1 + A_0A_2 + A_1A_2 = 3\,\frac{a_1\,b^2 - a_1\,a^2 + 2\,a\,b\,b_1}{a_1\,(3\,b_1^2 - a_1^2)}$$

$$A_0A_1A_2 = \frac{a\,(3\,b^3 - a^2)}{a_1\,(3\,b_1^2 - a_1^2)}.$$

V. ALACI

Observând că:

$$\cos 60^0 = -\cos 120^0 = \frac{1}{2},$$

$$\sin 60^0 = \sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

rezultă:

$$A_0 = \frac{a}{a_1},\quad A_1 = \frac{\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2}}{\frac{a_1}{2} + \frac{b_2\sqrt{3}}{2}} = \frac{b\sqrt{3} + a}{b_1\sqrt{3} + a_1},$$

$$A_2 = \frac{b\sqrt{3} - a}{b_1\sqrt{3} - a_1}.$$

Atunci:

$$\sum_{k=0}^{2} A_k = \frac{a}{a_1} + \frac{b\sqrt{3} + a}{b_1\sqrt{3} + a_1} + \frac{b\sqrt{3} - a}{b_1\sqrt{3} - a_1} =$$

$$\frac{a\,(3\,b_1^2 - a_1^2) + 2\,(3\,b\,b_1 - a\,a_1)\,a_1}{a_2\,(3\,b_1^2 - a_1^2)},$$

sau:

$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{2} A_k = 3\,\frac{a\,b_1^2 - a\,a_1^2 + 2\,a_1\,b\,b_1}{a_1\,(3\,b_1^2 - a_1^2)}.$$

Tot astfel:

$$A_0A_1 + A_0A_2 + A_1A_2 =$$

$$\frac{a}{a_1}\left(\frac{b\sqrt{3} + a}{b_2\sqrt{3} + a_1} + \frac{b\sqrt{3} - a}{b_1\sqrt{3} - a_1}\right) + \frac{3\,b^2 - a^2}{3\,b_1^2 - a_1^2} =$$

$$\frac{a}{a_1}\cdot\frac{2\,(3\,b\,b_1 - a_1\,a)}{3\,b_1^2 - a_1^2} + \frac{3\,b^2 - a^2}{3\,b_1^2 - a_1^2},$$

sau:

$$(2)\quad A_0A_1 + A_0A_2 + A_1A_2 = 3\,\frac{a_1\,b^2 - a_1\,a^2 + 2\,a\,b\,b_1}{a_1\,(3\,b_1^2 - a_1^2)}.$$

In fine:

$$(3)\quad A_0A_1A_2 = \frac{a}{a_1}\cdot\frac{b\sqrt{3} + a}{b_1\sqrt{3} + a_1}\cdot\frac{b\sqrt{3} - a}{b_1\sqrt{3} - a_1} =$$

$$\frac{a\,(3\,b^2 - a^2)}{a_1\,(3\,b_1^2 - a_1^2)}.$$

Relațiile (1), (2), (3) stabilesc identitățile cerute.

Soluții date de d-nii: *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru*, *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Cioclov Gheorghe* (bacalaureat), *Cezar Coșniță* (Bârlad), *Costăchescu V. C-tin* (Șc. Milit. de Marină), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Dumitrescu Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghieff N*, (Bolgrad), *Ghișoiu I. Petru* (lic. Spiru Haret, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu P. Haralambie* (lic. Oltenita), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), *Marineanu Traian* (student, București), *Mihalcea Emil* (Buzău), *Negrea A. Mircea-Leonte* (lic. Brăila), *Nichiforescu Gh. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Petrovici D.* (student), *Saur Ioan* (Șc. Polit., Timișoara) *Scarlat D-tru* (Șc. Navală, Con-stanța), *Secăroiu D-tru* (absolvent), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara) și *Vâlceanu N. Justin* (absolvent). București).

Soluția a 2-a, dată de d-nii: *Bratoșin Radu* (Brașov) 9, *Murăroiu* I. (lic. Brașov).

In articolul *„O clasă de ecuaţiuni algebrice, cu rădăcini trigonometrice“* din R. M. T., an. VIII, No. 9, se stabileşte că ecuaţia care admite rădăcinele:

$$(1)\qquad x=\frac{a\cos\frac{k\pi}{3}+b\sin\frac{k\pi}{3}}{a_1\cos\frac{k\pi}{3}+b_1\sin\frac{k\pi}{3}}\qquad (k=0,\ 1,\ 2),$$

este:

$$[(b_1+a_1i)x-(b+ai)]^3-[(b_2-a_1i)x-(b-ai)]^3=0,$$

unde, $i=\sqrt{-1}$.

Dezvoltând calculele şi ordonând în raport cu puterile lui x, găsim ecuaţia:

$$[(b_1+a_1i)^3-(b_1-a_1i)^3]x^3-3[(b_1+a_1i)^2(b+ai)-(b_1-a_1i)^2(b-ai)]x^2+3[(b_1+a_1i)(b+ai)^2-(b_1-ai)(b-ai)^2]x-[(b+ai)^3-(b-ai)^3]=0,$$

snu;

$$2a_1i(3b_1^2-a_1^2)x^3-bi(ab_1^2-aa_1^2+2a_1bb_1)x^2+bi(a_1b^2-a_1a^2+2abb_1)x-2ai(3b^2-a^2)=0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţii de gradul al 3-lea, sunt date de (1), fie ele A_0, A_1, A_2. Relaţiile cunoscute între rădăcini şi coeficienţi ne permite a scri imediat:

$$\sum_{k=0}^{2}A_k=3\,\frac{a_1b_1^2-aa_1^2+2a_1bb_1}{a_1(3b_1^2-a_1^2)},$$

$$A_0A_1+A_0A_2+A_2A_3=3\,\frac{a_1b^2-a_1a^2+2abb_1}{a(3b_1^2-a_1^2)}$$

$$A_0A_1A_2=\frac{a(3b^2-a^2)}{a_1(3b_1^2-a_1^2)},$$

adică tocmai identităţile cerute.

758. — *In orice triunghiu avem:*

$$\cot A+\cot B+\cot C-\frac{p}{4r}\geqq\frac{r_a+r_b+r_c}{4p},$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

NICOLAE O. ZAHARIA

In virtutea relaţiilor cunoscute:

$$\sin A=\frac{2s}{bc},\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad r=\frac{s}{p},$$

$$r_a=\frac{s}{p-a}\quad \text{etc.},$$

$$s^2=p(p-a)(p-b)(p-c),\quad a+b+c=2p,$$

deducem:

$$(1)\quad \cot A+\cot B+\cot C=\frac{b^2+c^2-a^2}{4s}+\frac{a^2+c^2-b^2}{4s}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4s}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4s}$$

$$(2)\qquad \frac{p}{4r}+\frac{r_a+r_b+r_c}{4p}=\frac{p^2}{4s}+\frac{s}{4p}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+b}+\frac{1}{p-c}\right)=\frac{p^2}{4s}+\frac{(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)+(p-a)(p-b)}{4s}=$$

$$\frac{4p^2-2p(a+b+c)+ab+ac+bc}{4s}=\frac{ab+ac+bc}{4s}.$$

Cum avem evident:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqq 0,$$

rezultă:

$$a^3+b^2+c^2\geqq ab+ac+bc,$$

deci şi:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4s}\geqq\frac{ab+ac+bc}{4s}.$$

In virtutea relaţiilor (1) şi (2), aceasta devine:

$$\cot A+\cot B+\cot C\geqq\frac{p}{4r}+\frac{r_a+r_b+r_c}{4p},$$

sau:

$$\cot A+\cot B+\cot C-\frac{p}{4r}\geqq\frac{r_a+r_b+r_c}{4p},$$

adică tocmai relaţia din enunţ.

Soluţii date de d-nii: *Almăjan Petru* (Caransebeş), *Chirilă S. Ioan* (lic. milit, Iaşi), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Dumitrescu Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Gheorghieff N.* (Bolgrad), *Ghişoiu I. Petru* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu Ţiu D. C-tin* (Şc. milit. de Geniu), *Micula O.* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihalcea Emil* (Buzău), *Negrea A. Leonte Mircea* (lic. Brăila), *Nichiforescu G.* (lic. Internat, Iaşi), *Scarlat D-tru* (Şc. Navală, Constanţa) şi *Ţiucra Mircea* (lic. Timişoara).

759. — *Se cere cubul perfect de cinci cifre, astfel ca cifra a patra să fie rădăcina patrată a numărului format de cifra întâia şi a treia, ultima cifră să fie rădăcina patrată a numărului format de cifrele a treia şi a patra, iar suma cifrelor cubului să fie un număr prim.*

I. ILIUŢĂ-DABULENI.

Fie $abcde$ cubul cerut. Conform enunţului trebue să avem:

$$d^2 = a\,c, \quad e^2 = c\,d,$$

a fiind cel puţin 1, şi ac patrat perfect, rezultă că ac poate fi, 16, 25, 36, 49, 64, 81, în care cazuri rezultă pentru d, respectiv 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Cifrele a, c, d, ar putea fi deci:

a	1	2	3	4	6	8
c	6	5	6	9	4	1
d	4	5	6	7	8	9

Cum $c\,d$, e patrat perfect, rezultă din tablou că el nu poate fi decât 64, în care caz $a = 1$, iar $e = 8$.

Numărul căutat, e deci de forma, $1\,b\,648$.

Ţinând seamă şi de faptul că suma cifrelor e un număr prim, uşor deduce că b nu poate fi decât 0 sau 4, şi atunci numărul nostru ar putea fi:

10648 sau 14648,

Din aceste numere numai primul însă e cub perfect:

$$10648 = 22^3,$$

care ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Almăjan Petru* (Caransebeş), *Baciu Râmnic*, *Băjenescu P.* (lic. Caracal), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Carp Ignat* (Chişinău), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Drig Petru* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Gavrilescu Vasile* (lic. Braşov), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Iacob St. Eugen* (Sublocot., de Artilerie), *Ionescu P. Haralamb*, *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Mihalcea Emil* (Buzău), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Mocănescu Ioan* (lic. Târgovişte), *Nasta Luci* (lic. Braşov), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Petrovici P.* (student), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Silvian Emil* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Stănescu N. Pompiliu* (lic. Milit., Craiova), *Tomescu C. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, T.-Jiu), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student, Leoben-Austria) şi *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu).

765. — *Să se stabilească inegalitatea:*

$$h_a r_a^2 + h_b r_b^2 + h_c r_c^2 \geqq 3\, r_a r_b r_c,$$

notaţiile fiind cele abicinuite într'un triunghiu oarecare.

PETRE I. GHISOIU

Soluţii date de d-nii: *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Negrea A. Leonte-Mircea* (lic. Brăila) şi *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student, Leoben-Austria).

Dacă în inegalitatea:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqq \frac{3}{2},$$

stabilită în „*Gazeta Matematică*“, vol. XXXII, pap. 195, luăm:

$$x = r_a, \quad y = r_b, \quad z = r_c,$$

r_a, r_b, r_c fiind razele cercurilor exînscrise unui triunghiu A B C, obţinem:

$$(1) \qquad \frac{r_a}{r_b + r_c} + \frac{r_b}{r_c + r_a} + \frac{r_c}{r_a + r_b} \geqq \frac{3}{2}.$$

Din relaţiile cunoscute:

$$\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}, \quad \frac{2}{h_b} = \frac{1}{r_c} + \frac{1}{r_a}, \quad \frac{2}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}$$

deducem:

$$r_b + r_c = \frac{2\, r_b r_c}{h_a}, \quad r_c + r_a = \frac{2\, r_c r_a}{h_b}, \quad r_a + r_b = \frac{2\, r_a r_b}{h_c}$$

şi atunci (1) devine:

$$\frac{h_a r_a}{2\, r_b r_c} + \frac{h_b r_b}{2\, r_c r_a} + \frac{h_c r_c}{2\, r_a r_b} \geqq \frac{3}{2},$$

şi înmulţind cu $2\, r_a r_b r_c$, obţinem:

$$h_a r_a^2 + h_b r_b^2 + h_c r_c^2 \geqq 3\, r_a r_b r_c,$$

tocmai inegalitatea cerută.

Alte soluții date de d-nii: *Mihalcea Emil* (stndent) și *Vâlceanu N. Iustin* (lic. Tg.-Jiu).

Observare. D-l *Coșniță Cezar* (Bârlad), stabilește și alte identități. Plecând dela inegalitățile:

$$x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)\geqq 6xyz$$

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\geqq 6xyz$$

$$x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2\geqq 12xyz,$$

d-sa deduce următoarele inegalități între elementele unui triunghiu;

$$\frac{1}{r_a^2 h_a}+\frac{1}{r_b^2 h_b}+\frac{1}{r_c^2 h_c}\geqq\frac{3}{r_a r_b r_c},$$

$$\frac{1}{r_a r_b h_c}+\frac{1}{r_c r_a h_b}+\frac{1}{r_a r_b h_c}\geqq\frac{3}{r_a r_b r_c},$$

$$\frac{1}{r_a h_a^2}+\frac{1}{r_b h_b^2}+\frac{2}{r_c h_c^2}\geqq\frac{3}{r_a r_b r_c}.$$

768. — *Se cere patratul perfect de șase cifre, astfel ca patratul cifrei unităților să fie egal cu numărul format de primele două cifre. Cifra a doua, care este un patrat perfect, pusă la dreapta cifrei a cincea, formează tot un patrat perfect.*

Din numărul format de primele două cifre scăzând 27, obținem numărul format de cifra a treia și a patra.

BALASESCU N. C-TIN.

Fie, $abcdef$ patratul căutat. Conform enunțului trebue să avem:

(1) $f^2=ab$, (2) $eb=n^2$, (3) $ab-27=cd$,

ab fiind un patrat perfect mai mare ca 27 și b fiind patrat perfect, ab nu poate fi decât:

49, 64, 81.

Din acestea vom elimina pe 49 și 64, căci f ar fi 7 sau 8, care nu pot fi terminațiile unui patrat perfect.

Pentru ab, rămâne numai 81, deci $f=9$ și $cd=54$.

Numărul căutat este de forma, $8154e9$.

Cum $e1$ este patrat perfect, e nu poate fi decât 0 sau 8, în care caz numărul căutat ar putea fi:

815409 sau 815489

Dintre acestea, numai 815409 este patrat perfect:

$$815409=903^2,$$

care soluționează complect problema.

Soluții primite dela d-nii: *Almăjan C. Petru* (absolvent, Caransebeș), *Baciu G. Teodor* (R.-Sărat), *Băjenescu A. P.* (lic. Caracal), *Bolgar V. D.* (lic. Oltenita), *Brotmann I.* (lic. Matei Basarab, București), *Carp Ig.* (lic. Chișinău), *Cincilian Agop* (lic. Brașov), *Dimitrie At. Ioan* (absolvent, Gaîați), *Drig Petru* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Gavrilescu Vasile*, *Ghișoiu I. Petru* (lic. Spiru Haret, București), *Glatz Sanda*, *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Iacob St. Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Marineanu Traian* (student, București), *Mihalcea Emil* (Buzău). *Milea G Ene* (lic. R.-Sărat), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic Internat, Iași), *Savin C. Ioan* (lic. Milit.. Iași), *Stănescu N. Pompiliu* (lic. Milit., Craiova), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, lic. Tg.-Jiu) și *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu).

773. — *Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, în care prima cifră este egală cu a treia și cu ultima, a patra cifră scrisă după a treia dă un patrat perfect; în fine a doua cifră este egală cu suma cifrelor a treia și a patra.*

EMIL MEREUTA

Conform enunțului, numărul este de forma:

$$abaca,$$

unde avem încă:

(1) $$ac=n^2$$

(2) $$b=a+c,$$

ac fiind patrat perfect și a fiind cel puțin 1, rezultă că ac poate fi: 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Cum $a+c$ este cel mult 9, rezultă că ac, poate fi numai:

(3) 16, 25, 36. 81.

Apoi observând că a este terminația unui patra perfect, nu poate fi 2, 3. sau 8, astfel că din șirul (3), rămâne pentru ac numai 16, deci:

$$a=1,\quad c=6,$$

Atunci din (2) rezultă, $b=7$, și numărul cerut ar fi 17161, care fiind patrat perfect:

$$17161=131^2,$$

este soluția problemei.

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petru* (absolvent, Caransebeș), *Baciu G. Teodor* (absolvent, lic. R.-Sărat), *Băjenescu A. P.* (lic. Caracal), *Bolgar V. Mitică* (lic. Oltenița), *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, București), *Carp Ig.* (absolvent, Chișinău), *Ciancilian Agop* (lic. Brașov), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), *Dumitrescu V. C-tin* (lic. Focșani), *Gavrilescu V., Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Glatz Sanda, Crossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Hamerak Carol* (Caransebeș), *Iacob St. Eugen* (Sublocot. de Artilerie), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Mihalcea I. Emilian* (student). *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Mocănescu Gr. Ioan* (lic. Târgoviște), *Negrea A. Leonte-Mircea* (bacalaureat, Brăila), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Popa Gr. Ioan* (lic. Oltenița), *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Silvian Emil* (lic. Lazăr, București), *Secăroiu D-tru* (absolvent), *Stănescu N. Pompiliu* (lic. Mil., Craiova), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, lic. Tg.-Jiu) și *Vonica C. Ioan* (lic. Tg.-Jiu).

PROBLEME PROPUSE

802. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel că numărul format de cifra a doua urmată de a treia să ne dea patratul primei cifre, iar ultima cifră să fie un patrat perfect,

STANESCU N. POMPILIU

803. — Se cere un cub perfect de cinci cifre, astfel că a doua cifră să fie egală cu suma ultimilor două cifre; a patra cifră ridicată la patrat să fie egală cu numărul format de ultima cifră și cea de a patra; patratul sumei între prima și ultima cifră să fie egală cu cifra a treia.

MARINEANU TRAIAN

804. — Să se arate că numerile din șirul:

$$25,\ 90025,\ 9900025,\ 999000025,\ldots,$$

sunt patrate perfecte.

N. G. BOTEA

805. — Mediatoarele unui triunghiu ABC întâlnesc cercul O circumscris acestui triunghiu în punctele A_1, B_1, C_1. Să se arate că cercurile descrise din A_1, B_1, C_1 ca centre și trecând respectiv prin B și C, C și A, A și B, trec și prin centrul I al cercului înscris triunghiului ABC. Punctele A', B', C' diametral opuse lui I în cercurile A_1, B_1, C_1 sunt centrele cercurilor exînscrise triunghiului considerat.

JUSTIN N. VALCEANU

806. — Dându-se triunghiul oarecare ABC, dintr'un punct M al medianei BB_1 se duce o paralelă DE la latura AC. Fie N punctul de întâlnire, al dreptelor AE și CD. Paralelele duse din B_1 la laturile AB și BC intersectează dreptele AN, AM, CN și CM respectiv în punctele G, A_1, F și C_1.

1°. Triunghiul $A_1B_1C_1$ e asemenea cu triunghiul ABC.

2°. BB_1 este și mediana triunghiului $A_1B_1C_1$.

3°. Dreapta FG e paralelă cu DE.

IOAN I. ROMAN

807. — Să se dovedească că ecuațiile:

$$4abcx^2+4(a^3+b^3+c^3)x+9abc=0,$$

$$3(a+b+c)x^2+2\sqrt{2}(ab+bc+ca)x+2abc=0,$$

au rădăcinele reale, a, b, c fiind reali,

CEZAR COSNITA

808. — Să se rezolve ecuația:

$$4\sin^2 x-2\sqrt{5}\cos x+\sqrt{5}=0.$$

EMIL MEREUTA

809. — Să se stabilească identitățile:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}=n\,i\sqrt{2}\,\frac{(1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}}{(1+i)^n-(1-i)^n}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}=(-\sqrt{2})^n\,\frac{(-i)^n-i^n}{(1+i)^n-(1-i)^n}$$

V. ALACI

Observare. La sfârșitul problemei 795 din numărul trecut, trebue adăogat: „*prin 18*“.

INFORMAȚIUNI

Ziarele aduc știrea că la Nisa a încetat din viață Inginerul Inspector General *V. Cristescu,* membru fondator al revistei și Societății *„Gazeta Matematică“.*

Numele regretatului *V. Cristescu* a fost adesea citat și în revista noastră.

Aducem pe această cale, membrilor și colaboratorilor societății *„Gazeta Matematică“*, expresiunea condoleanțelor noastre pentru perderea suferită în persoana entuziastului fondator, susținător, îndrumător și colaborator al revistei *„Gazeta Matematică.*

——

Recomandăm călduros corespondenților noștri, cartea *„Gândirea Matematică“* a d-lui profesor universitar *Petre Sergescu.*

——

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

——

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

——

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

——

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

——

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs,* de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs,* se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvitor înscris pentru *Concurs.*

——

Legându-se colecția R. M. T., anul V, în volum, și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

——

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing.-Șef C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 MAIU 1929 No. 3

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CONST. IONESCU-BUJOR. EXTINDERI IN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI.
2. NOTE MATEMATICE, 7. 8, 9.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. CONCURSUL REVISTEI MATEMATICE DIN TIMISOARA.
5. PROBLEME REZOLVATE: 756, 771, 775, 776, 779, 781, 784 793.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

ANUL IX — NO. 3. TIMISOARA, 15 MAIU 1929

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

EXTINDERI IN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

III. CONICELE I ȘI EXTINDEREA PERPENDICULARITĂȚII

de C. IONESCU-BUJOR

Chestiunile ce voi expune vor contribui în deosebi la lărgirea domeniului de influență al unui punct de referință dela mănunchiul de puncte, linii și proprietăți — parțial schițate în articolele precedente — la întreg planul triunghiului de referință.

Consider în planul P un triunghiu și ortocentrul său ca elemente de referință; cercul circumscris, cercul lui *Euler*, etc., sunt elemente remarcabile aparținând sistemului astfel determinat. Condus de însăși firea rezultatelor — întrucât după proecția în care ortocentrul devine un punct M toate cercurile devin elipse — leg toate cercurile planului P sistemului ortic.

Proecția cilindrică pe un plan P_1 a elementelor planului P încadrate sistemului ortic înfățișează alături de triunghiul proecție a triunghiului considerat în planul P; punctul M — proecție a ortocentrului — și socotit al doilea element de referință în planul P_1.

Elipsele planului P_1, generate prin proecție de cercurile planului P au axele paralele și proporționale.

Ecuațiile lor sunt de forma:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1,$$

unde:

$$\frac{a}{b}=k.$$

Omogenizând și căutând intersecția cu dreapta dela infinit, se găsesc punctele I și J de coordonate:

$$I\left(i,\ \frac{b}{a},\ 0\right),\quad J\left(-i,\ \frac{b}{a},\ 0\right),$$

ceiace exprimă că toate elipsele planului P_1 provenind din proecția cercurilor planului P, trec prin două puncte I, J dela infinit. Iar reciproca este deopotrivă adevărată, toate conicele planului P_1, trecând prin punctele I, J determinate de coordonatele notate, sunt elipse provenind din proecția cercurilor planului P.

Numesc punctele I, J puncte absolute ale planului în sistemului M. Concentrând rezultatele:

„Punctele imaginare unde elipsa circumscrisă triunghiului de referință întâlnește dreapta dela infinit sunt puncte absolute ale planului în sistemul de referință M.“

„Toate elipsele planului trecând prin punctele absolute ale sistemului M, *sunt conice* I *ale sistemului.“*

In cazul sistemului ortic, puncte absolute sunt punctele ciclice ale planului, iar conice I sunt toate cercurile planului.

Rezultatele precizate sugerează apropierea perpendicularității de sistemul ortic și extinderea ei la un sistem M. Două drepte perpendiculare ale planului P, sunt diametrii conjugați într'un cerc al planului al cărui centru e intersecția dreptelor. Legătura cu sistemul ortic este acum vizibilă:

„Dreptele perpendiculare sunt diametrii conjugați ai unei conice I în sistemul ortic, conica având centrul la intersecția dreptelor.“

In cât devine clară și extinderea:

„Două drepte paralele cu diametrii conjugați ai unei conice I *din sistemul* M, *aparțin sistemului și sunt corespondentele direcțiilor perpendiculare ale sistemului ortic.“*

Socotesc demnă de atenție această lărgire a câmpului de corespondență dintre ortocentru și un punct oarecare M, lărgire care permite o vedere mai deplină a elementelor stăpânite de punct, cum și o înțelegere mai clară a corespondenței dintre elementele unui sistem și acele ale altor sisteme.

In alt limbaj, nelegat celui anterior s'ar putea spune acestui rezultat cheia a o sumă dn generalizări în domeniul noțiunilor și proprietăților geometrice.

Astfet — se poate preciza legătura dintre cevienele punctului de referință M și laturile triunghiului de referință — în cadrul sistemului; generalizare s'ar spune in alte împrejurări din lipsa precizării „în cadrul sistemului" — extindere la sistemul M a unei proprietăți cunoscută numai pentru ortocentru, spun, adăogând precizarea.

Așa dar ca extindere apare proprietatea:

„Cevienele punctului de referință și cu laturile corespunzătoare ale triunghiului de referință sunt direcții paralele diametrilor conjugați ai conicelor I *din sistem."*

De aci se desprinde o reciprocitate: punctul M se poate deduce din cunoașterea unei elipse a sistemului său; încât element generator al celorlalte elemente ale sistemului poate fi privită și o elipsă.

„Sistemul în care se află un punct M *e o înșiruire de elemente: noțiuni geometrice sau relații, și desfășurabilă începând cu oricare element; eu am început cu punctul* M *— cu ocazia proprietății de mai sus s'a relevat alt element „prim."*

Elemente analoage, desfășurare analoagă sunt ale oricărui punct din plan.

Proprietatea evidențiată e sursă și a unui al doilea șir de idei.

In planul P_1 s'au considerat un triunghiu T și un punct M ca element de referință. Fie în același plan un alt triunghiu T'. Considerat independent de T, el poate fi privit element de referință, i se poate asocia un element M'; iar cuplul (T', M') determină un sistem unic și absolut analog — forma! — oricărui alt sistem (T_k, M_k).

Dacă însă, se raportă T' la un alt sistem de referință cum este (T, M), el face parte din elementele ce intră în constituția acestui sistem. Și în acest caz T' poate fi privit ca element de referință, dar direct cuprins în sistemul (T, M) ceiace atrage fixarea prealabilă — neliberă — a punctului de referință M' după următorul enunț:

M *și* T *fiind cele două elemente de referință fundamentale, un alt triunghiu* T', *aparținând sistemului, dacă e privit ca triunghiu de referință, are ca punct de referință un punct* M', *ale cărui ceviene în* T' *și laturile corespunzătoare ale triunghiului* T' *sunt paralele cu doi diametri conjugați in elipsele* I *ale sistemului* N."

Sau dacă T' se consideră element ai sistemului (T, M), el nu-și poate asocia decât un punct M' și numai unul cu care să formeze un sistem și M' e determinat astfel cum s'a spus.

O altă formă a acestei chestiuni este proprietatea:

Dacă T *și* M *sunt cele două elemente de referință, într'un triunghiu* T', *cevienele — care împreună cu laturile opuse sunt paralele cu doi diametri conjugați ai conicelor* I *în sistemul* M *— sunt concurente.*

* * *

Tot ca urmare a extinderii perpendicularității apar extinderile câtorva noțiuni geometrice la cadrul unui sistem oarecare M, din cadrul sistemului ortic în care au fost gândite până acum.

Triunghiu podar în sistemul M. Voi defini, cu noile vederi triunghiul podar al unui punct P, element definit sub altă formă în R. M. T., vol. VIII, No. 7.

„Fie A B C *și* M *cele două elemente de referință. Paralelele duse print'un punct* P *diametrilor unei conice* I, *ai căror conjuguți sunt drepte paralele cu laturile respective ale unui triunghiu* T', *întâlnesc aceste laturi în vârfurile triunghiului podar al punctului* P *față de triunghiul* T' *aparținând sistemului* M.

Când T' este chlar triunghiul A B C, se definește triunghiul podar al punctului P față de triunghiul de referință.

Aceasta dă înțeles extinderii teoremei lui *Simson:*

Teorema lui Simson în sistemul M. *„In triunghiul de referință* A B C *și sistemul* M, *locul geometric al punctelor, ale căror triunghiuri podare se reduc la o dreaptă, este conica circumscrisă a sistemului."*

Ca generalizare se cunoaşte această formă a teoremei lui *Simson:*

„Locul geometrlc al punctelor aşa fel că paralelele duse prin ele la cevienele unui punct M tae laturile triunghiului în câte trei puncte colineare, este o conică circumscrisă triunghiului".

Nu se înfăţişau însă relaţiile geometrice ale conicei lor geometric cu punctul M sau cu alte elemente ale planului. Incadrată — sub formă de extindere — concepţiei „celor două elemente de referinţă", se precizează relaţiile geometrice ale conicei lor geometric.

Teorema ortopolului în sistemul M. *Fie* A B C *şi* M *cele două elemente pe referinţă. Cevienele paralele unui diametru al unei conice* I, *al cărui conjugat e paralel cu o dreaptă dată* Δ, *tae dreapta* Δ *în* A_1, B_1, C_1.

Paralelele duse prin A_1, B_1, C_1 *cevienelor respective ale punctului* M *sunt concurente în* P." *Numesc punctul* P, *polul triunghiului* A B C *în raport cu dreapta* Δ.

Teorema ortologiei în sistemul M. *In planul elementelor de referinţă* A B C *şi* M, *fie două triunghiuri* T_1 *şi* T_2. *Dacă cevienele triunghiului* T_1 — *paralele cu diametrii unei conice* I *conjugaţi diametrilor paraleli cu laturile respective al triunghiului* T_2 — *sunt concurente, atunci şi cevienele triunghiului* T_2 — *paralele cu diametrii acelei conice, conjugaţi diametrilor paraleli cu laturile respective ale triunghiului* T_1 *sunt concurente".*

* * *

Inchei aci chestiunile extinse — pe baza extinderii perpendicularităţii — la sistemul M. După aceleaşi norme, orice problemă de ortogonalitate, se încadrează sistemului ortocentric şi are o corespodentă în sistemul oricărui punct luat în planul triunghiului de referinţă.

NOTE MATEMATICE

7. *Generalizarea notei 6 din R. M. T., an VIII.*

Această notă matematică, publicată în No. 2, an. VIII, poate fi generalizată.

Fie de rezolvat ecuaţia:

$$(1)\quad A_1 x^{m-2}(B_1 x^2 + B_2 x + B_3) + A_2 x^{m-1} B_1 x^2 + B_2 x + B_3) + A_3 x^m = 0.$$

Avem:

$$B_1 x^2 + B_2 x + B_3 = \frac{-A_2 x^{m-1} \pm \sqrt{A_2^2 x^{2m-2} - 4 A_3 A_1 x^{2m-2}}}{2 A_1 x^{m-2}} =$$

$$= x \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 A_3 A_1}}{2 A_1} = x C_1,$$

ceiace se mai scrie:

$$B_1 x^2 + (B_2 - C) x + B_3 = 0,$$

de unde:

$$x = \frac{-(B_2 - C) \pm \sqrt{(B_2 - C)^2 - 4 B_3 B_1}}{2 B_1}.$$

Făcând:

$$m = 2,\ A_1 = 1,\ B_1 = a,\ B_b = 0,\ B_2 = b,$$

$$A_2 = c,\ A_3 = d,$$

dăm peste ecuaţia (7) din nota citată.

Luând:

$$m = 2,\ A_1 = 1,\ B_1 = a,\ B_2 = b,\ B_3 = c,$$

$$A_2 = d,\ A_2 = e,$$

regăsim ecuaţia (8) din aceiaşi notă.

Fie, încă, de rezolvat ecuaţia:

$$(2)\quad A_1 (B_1 x^2 + B_2 x + B_3)^{2n} + A_2 (B_1 x^2 + B_2 x + B_3)^n + A_3 = 0.$$

Din ea scoatem:

$$B_1 x^2 + B_2 x + B_3)^n = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4 A_3 A_1}}{2 A_1} = C$$

$$= C (\cos 2 k \pi + i \sin 2 k \pi).$$

De aici:

$$B_1 x^2 + B_2 x + B_3 = \sqrt[n]{C}\left(\cos \frac{2 k \pi}{n} + i \sin \frac{2 k \pi}{n}\right)$$

$$\therefore B_1 x^2 + B_2 x + B_3 - \sqrt[n]{C}\left(\cos \frac{2 k \pi}{n} + i \sin \frac{2 k \pi}{n}\right) = 0$$

ecuație de gr. II, din care deducem:

$$x=\frac{-B_3\pm\sqrt{B_2^2-4B_1\sqrt[n]{C}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)}}{2B_1}$$

unde:

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

In cazul special $n=1$:

Pentru:

$$A_1=1,\ B_1=a,\ B_2=\pm b,\ B_3=0,$$
$$A_2=c,\ A_3=\pm d,$$

ne găsim în cazul ecuației (1) din nota citată.

Pentru:

$$A_1=1,\ B_1=a,\ B_2=\pm b,\ B_3=\pm c,$$
$$A_2=d,\ A_3=\pm e,$$

regăsim ecuația (2).

Dacă luăm în locul necunoscutei x, pe $x\sqrt{x}$ și punem:

$$A_1=a,\ B_1=1,\ B_2=\pm 1,\ B_3=0,$$
$$A_2=b,\ A_3=\pm c,$$

dăm peste ecuația (3).

I. MURAROIU

8. *Asupra unei limite.*

Se cunoaște limita expresiei:

$$\frac{\lg\dfrac{f(1)f(2)\ldots f(n)}{\varphi(1)\varphi(2)\ldots[\varphi(n)]}}{\lg n},$$

când $n\to\infty$, unde:

$$f(n)=a_0n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_p$$
$$\varphi(n)=b_0n^p+b_1n^{p-1}+\ldots+b_p$$
$$[a_0=b^0,\ a_1\neq b_1\ldots a_p\neq b_p].$$

Fie două polinoame:

$$f(n)=A_0n^p+A_1n^{p-1}+\ldots+A_p\quad[A_0\neq B_0]$$
$$\varphi(n)=B_0n^q+B_1n^{q-1}+\ldots+B_p\quad[B_q\neq A_p.]$$

unde $p>q$.

In cele ce urmează îmi propun să găsesc:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg\left[\dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)}\right]}{\lg n}.$$

Punem pentru aceasta:

$$u_n=f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$$
$$v_n=\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n).$$

După teorema lui *Cesaró* avem:

$$\lim_{n=\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n=\infty}\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=\lim_{n=\infty}\frac{f(n)}{\varphi(n)}.$$

Apoi mai putem scrie:

$$E=\frac{\lg\left[\dfrac{f(1)+\ldots+f(n)}{\varphi(1)+\ldots+\varphi(n)}\right]}{\lg n}=$$
$$\frac{\lg\left[\dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)}\right]}{\lg\dfrac{f(n)}{\varphi(n)}}\cdot\frac{\lg\dfrac{f(n)}{\varphi(n)}}{\lg n}.$$

Deci:

$$\lim_{n\to\infty}E=\lim_{n=\infty}\frac{\lg\left[\dfrac{f(1)+\ldots+f(n)}{\varphi(1)+\ldots+\varphi(n)}\right]}{\lg\dfrac{f(n)}{\varphi(n)}}\lim_{n=\infty}\frac{\lg\dfrac{f(n)}{\varphi(n)}}{\lg(n)}$$

Dar cum:

$$\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)}\ \text{și}\ \frac{f(n)}{\varphi(n)},$$

sunt de același ordin avem:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\lg\dfrac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n)}}{\lg\dfrac{f(n)}{\varphi(n)}}=1.$$

Prin urmare:

$$\lim_{n=\infty}E=\lim_{n=\infty}-\frac{\lg\dfrac{f(n)}{\varphi(n)}}{\lg n}.$$

Dar:

$$\therefore\ \frac{f(n)}{\varphi(n)}=\frac{A_0n^p+A_1n^{p-1}+\ldots+A_p}{B_0n^q+B_1n^{q-1}+\ldots+B_q}$$

$$\frac{f(n)}{\varphi(n)}=n^{p-q}\left[\frac{A_0n^q+\ldots+A_pn^{q-p}}{B_0n^q+\ldots+B_q}\right].$$

Deci;

$$\lg \frac{f(n)}{\varphi(n)} = (p-q)\lg n + \lg\left[\frac{A_0 n^q + \ldots + A_p n^{q-p}}{B_0 n^q + \ldots + B_q}\right]$$

sau:

$$\frac{1}{\lg n}\lg \frac{f(n)}{\varphi(n)} = p - q + \frac{\lg\left[\frac{A_0 n^q + \ldots + A_p n^{q-p}}{B_0 n^q + \ldots + B_q}\right]}{\lg n}.$$

Deci:

$$\lim_{n=\infty} E = (p-q) + \lim_{n=\infty} \frac{\lg\left[\frac{A_0 n^q + \ldots + A_p n^{q-p}}{B_0 n^q + \ldots + B_q}\right]}{\lg n}.$$

Insă:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lg\left[\frac{A_0 n^q + \ldots + A_p n^{q-p}}{B_0 n^q + \ldots + B_q}\right]}{\lg n} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

(n crescând prin valori întregi şi pozitive).

Deci:

$$\lim_{n=\infty} E = (p-q)$$

$$[p > q].$$

GH. I. BALABAN

9. *Generalizarea problemei 750.*

Această problemă, rezolvată în „R. M. T.“, an. VIII, No. 12, poate fi generalizată prin rezolvarea ecuaţiei:

$$(b-1)x^n - (C_n^{n-1} x^{n-1} a + \ldots + C_n^{n-k} x^{n-k} a^k + \ldots$$
$$\ldots + C_n^2 x^2 a^{n-2} + C_n^1 x a^{n-1} + a^n) = 0.$$

Aceasta se mai poate scrie:

$$b x^n - (x+a)^n = 0$$
$$\therefore \quad b x^n = (x+a)^n,$$

sau, încă:

$$\left(\frac{x+a}{x\sqrt[n]{b}}\right)^n = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

$$\therefore \frac{x+a}{x\sqrt[n]{b}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

sau, în definitiv:

$$x = \frac{a}{\sqrt[n]{b}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) - 1},$$

unde:

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots n = 1.$$

I. MURAROIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, No. 8, Aprilie 1929. † *Vasile Cristescu.* Metodologia matematicilor (urmare), de † *N. C. Segărceanu.* Hipocicloida cu trei rebrusmente şi ortopolul, de *Sublocot. Mihail I. Focşăneanu*

2. *Bulletin scientifique de l'école polytechnique de Timişoara*, tome 2, fasc. 1 — 2. Sur la développement en série d'après les fonctions fondamentales-*Fredholm* d'un noyau symetrisable-généralisé, par *O. Ţino.* Calcul pratique de la resistance de la poutre-biétayée, par *Toussaint A'.* Calcul de la déformation d'uu ressort de mesure, par *Dr. Ing. Cornélius Miklósi.* Les lignites de Roumanie et leurs caractères dans la question de carburants, par *I. Cristesco & A. Sandor.* Studiul unui canal navigabil Cernavodă-Constanţa, de *Bârglăzan Aurel şi Smigelschi Octavian.* Procès-verbaux des séances de la Société scientifique de l'école polytechnique de Timişoara.

3. *Angheluţă Theodor.* Sur une classe nouvelle de noyaux pour une équation *Fredholm.* (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 18 février 1929.

CONCURSUL REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA

Azi putem da rezultatul concursului instituit între corespondenţii Revistei noastre, prin condiţiunile publicate în No. 9, anul VII (15 Noembrie 1927).

Am socotit, ca de obiceiu, câte cinci puncte bune de fiecare problemă rezolvată dintre cele propuse în mod special pentru concurs, câte două pentru problemele simple propuse după anunţare şi câte unul pentru celelalte. Numărul maxim de puncte ne-a indicat pe corespondentul premiat. Am menţionat pe ceilalţi doi care vin în ordinea clasificării imediat după cel premiat.

Am avut în total 44 de înscrişi faţă de 19 şi de 37 în concursurile trecute, dintre care doi s'au retras din concurs. Am avut anume:

2 în clasa V,
17 în clasa VI,
14 în clasa VII (unul retras),
11 în clasa VIII (unul retras).

După licee distribuiţi s'au prezentat: şeapte candidaţi dela liceul militar din Iaşi, patru dela

liceul din Braşov, câte trei dela liceele din P.-Neamţ, Galaţi, Sf. Sava (Buc.), câte doi dela liceele din Arad, M.-Basarab (Bucureşti), Caracal, Buzeşti (Craiova), militar (Craiova), câte unul dela liceele din Bălţi, Bârlad, Mihai-Viteazul (Bucureşti), S. Haret (Bucureşti), Carol (Craiova), Mănăstirea-Dealului, Internat (Iaşi), Naţional (Iaşi), Târgovişte, Tighina, T.-Jiu, militar T.-Mureş, T.-Severin şi unul de la Şcoala de conductori (Cluj).

Iată acum şi rezultatele:

Punând pe d-l *Petrică Ioan* dela Şcoala de Conductori din Cluj printre candidaţii din cl. V, i-am acordat premiul acestei clase cu numărul de 100 de puncte.

In clasa VI am acordat premiul d-lui *Savin C. Ioan* (liceul militar, Iaşi), care a întrunit 185 de puncte. Domnia-sa se distinge prin o deosebită îngrijire de formă şi de fond pe care o dă soluţiilor.

Menţiuni speciale merită d-nii *Murăroiu I.* (liceul Braşov) şi *Sirchis Iosif* (liceul Tighina) *ex aequo* cu câte 175 de puncte.

Clasa VII are în fruntea sa pe d-l *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (liceul Buzeşti, Craiova), o veche cunoştinţă a noastră, care ne-a dat în total o frumoasă activitate de probleme rezolvate şi de data aceasta (205 puncte) pe lângă note şi generalizări remarcabile. Ii acordăm premiul clasei sale.

Menţionăm din aceiaşi clasă pe d-nii *Stan I. Aurelian* (liceul militar, Iaşi) cu 199 de puncte şi *Ionescu Ţiu D. Constantin* (liceul militar, Craiova) cu 194 de puncte.

In fine printre elevii clasei a VIII-a s'a distins în mod deosebit d-l *Roman I. Ioan* (liceul Mihai-Viteazul, Bucureşti) care cu cele 220 de puncte bune ne-a prezentat o activitate bogată de probleme riguros rezolvate şi unele elegant generalizate. Merită premiul clasei VIII.

Menţiune specială pentru d-nul *Panţu Z. Ioan* (liceul Gh. Lazăr, Bucureşti) care se apropie atât ca număr de puncte (215) cât şi ca fond de activitate de d-l Roman. A doua menţiune specială o merită d-nul *Sprinceană Gh. Gheorghe* (liceul Galaţi) cu 196 de puncte.

Ne pare bine că liceul militar din Iaşi ne prezintă o frumoasă şi bogată recoltă. Ne bucură că liceul din Galaţi şi cele din Craiova se menţin în atenţia noastră. Regretăm că anul acesta liceul Cantemir din Bucureşti, aşa de activ altădată, a absentat cu totul dela concurs. In schimb liceele Mihai-Viteazul şi Gh. Lazăr din Bucureşti ne-au dat cam 77% din numărul maxim de puncte bune ce s'ar fi putut obţine (286).

V. VALCOVICI

PROBLEME REZOLVATE

756. — *Se cere pentru n tinzând la infinit, limita expresiei:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k^3+12k^2+47k+60}.$$

GH. I. BALABAN

Descompunem fracţiunea de sub semnul sumă, în fracţii simple. Pentru aceasta observăm că numitorul fracţiunei, se anulează pentru $k=-3$, deci se divide prin $k+3$, şi putem scri:

$$k^3+12k^2+47k+60=(k+3)(k^2+9k+20),$$

iar: $k^2+9k+20=(k+4)(k+5)$, deci:

$$k^3+12k^2+47k+60=(k+3)(k+4)(k+5).$$

Acum vom scri:

$$\frac{k+2}{k^3+12k^2+47k+60}=\frac{A}{k+3}+\frac{B}{k+4}+\frac{C}{k+5},$$

unde trebuie să determinăm pe A, B, C.

Aducând la acelaşi numitor rezultă:

$$(1)\quad k+2=A(k+4)(k+5)+B(k+3)(k+5)+C(k+3)(k+4).$$

Pentru $k=-3$, deducem uşor $A=-\frac{1}{2}$, pentru $k=-4$, deducem $B=2$ şi pentru $k=-5$, deducem $C=-\frac{3}{2}$.

Atunci rezultă:

$$\frac{k+2}{k^3+12k^2+47k+60}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{k+3}+\frac{4}{k+4}-\frac{3}{k+5}\right),$$

și deci:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k^3+12k^2+47k+60}=\frac{1}{2}\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}+4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+4}-3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+5}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+3}+\frac{4}{5}+4\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k+4}+\frac{4}{n+4}-3\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k+5}-\frac{3}{n+4}-\frac{3}{n+5}\right).$$

Observând însă, că:

$$-\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+3}+4\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k+4}-3\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k+5}=0,$$

rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k^3+12k^2+47k+60}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{n+4}-\frac{3}{n+4}-\frac{3}{n+5}\right).$$

Pentru $n=\infty$, deducem de aci:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k^3+12k^2+47k+60}=\frac{7}{40}.$$

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petru, Bratoșin Radu* (Brașov), *Carp Ig., Cioclov Gheorghe* (bacalaureat), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Dumitrescu Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghieff N.* (Bolgrad), *Hamerac C.* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Marineanu Traian* (student, București), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Scarlat D-tru* (Șc. Navală, Constanța), *Saur Ioan* (Șc. Polit., Timișoara) și *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

Altă soluție dată de d-l: *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București).

Fie:

$$f(x)=\frac{x^2+\frac{9}{2}x+5}{(x+2)(x+3)(x+4)}.$$

Conform formulei:

$$\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=f(n+1)-f(1),$$

(R, M. T., vol. II, pag. 99), avem:

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(k+1)^2+\frac{9}{2}(k+1)+5}{(k+3)(k+4)(k+5)}-\frac{k^2+\frac{9}{2}k+3}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right]=\frac{(n+1)^2+\frac{9}{2}(n+1)+5}{(n+3)(n+4)(n+5)}-\frac{7}{40}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+3)(k+4)}\left[\frac{(k+1)^2+\frac{9}{2}(k+1)+5}{k+5}-\frac{k^2+\frac{9}{2}k+5}{k+2}\right]=\frac{(n+1)^2+\frac{9}{2}(n+1)+5}{(n+3)(n+4)(n+5)}-\frac{7}{40}.$$

De aci deducem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{(k+3)(k+4)(k+5)}=\frac{7}{40}-\frac{(n+1)^2+\frac{9}{2}(n+1)+5}{(n+3)(n+4)(n+5)}.$$

Pentru $n=\infty$, ultimul termen din membrul al 2-lea, tinzând la zero, rezultă:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{(k+3)(k+4)(k+5)}=\frac{7}{40}.$$

771. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sqrt[4]{b^4+2ac(ac-2b^2)\pm\sqrt{[b^4+2ac(ac-2b^2)]^2-4a^4c^4}}=\pm\frac{2ac\sqrt[4]{2}}{\sqrt{b^2-4ac}-b}.$$

CEZAR COSNITA.

Insemnăm cu A al 2-lea membru, putem scri succesiv:

$$A=\pm\frac{2ac\sqrt[4]{2}}{\sqrt{b^2-4ac}-b}=\pm\frac{2ac\sqrt[3]{2}(\sqrt{b^2-4ac}+b)}{-4ac}$$

$$=\mp\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{b^2-4ac}+b).$$

Ridicând la puterea patra, avem:

$$A^4 = \frac{1}{8}(2b^2 - 4ac + 2b\sqrt{b^2-4ac})^2 =$$

$$\frac{1}{2}[b^4 + 4a^2c^2 + b^4 - 4acb^2 - 4acb^2 +$$

$$(b^3 - 2abc)\sqrt{b^2-4ac}] = b^4 + 2ac(ac-2b^2) \pm$$

$$\sqrt{(b^2-4ac)(b^3-2abc)^2} = b^4 + 2ac(ac-2b^2) \pm$$

$$\sqrt{[b^4 + 2ac(ac-2b^2)]^2 - 4a^4c^4},$$

deci:

$$A = \sqrt[4]{b^4 + 2ac(ac-2b^2) \pm \sqrt{[b^4+2ac(ac-2b^2)]^2 - 4a^4c^4}}$$

Soluții date de d-nii: *Almăjan P.* (absolvent, Caransebeș), *Dimitriu A. Ioan* (absolvent, Galați), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu).

Soluția 2-a. Folosim metoda din articolul *„Identități iraționale"*, R. M. T., vol. IV, pag. 131.

Fie ecuațiunea:

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

cu rădăcinele x_1 și x_2. Să formăm ecuațiunea care are rădăcinele:

$$(2) \qquad X_1 = \frac{1}{x_1^4}, \quad X_2 = \frac{1}{x_2^4}.$$

Putem scri, ținând seama de relațiile dintre rădăcini:

$$X_1 + X_2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^4 x_2^4} =$$

$$\frac{(x_1+x_2)^4 - 4x_1x_2(x_1+x_2)^2 + 2x_1^2x_2^2}{x_1^4x_2^4} =$$

$$\frac{\frac{b^4}{a^4} - 4\frac{c}{a}\cdot\frac{b^2}{a^2} + 2\frac{c^2}{a^2}}{\frac{c^4}{a^4}} = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{c^4}$$

$$X_1 X_2 = \frac{1}{x_1^4 x_2^4} = \frac{a^4}{c^4}.$$

Ecuația de gradul al 2-lea, cu rădăcinele date de (2), este:

$$(3) \quad c^4X^2 - (b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c)X + a^4 = 0.$$

Cum între rădăcinele ecuațiilor (1) și (3) există relațiile (2), putem scri:

$$\frac{b^4 + 2ac(ac-2b^2) \pm \sqrt{[b^4+2ac(ac-2b^2)]^2 - 4a^4c^4}}{2c^4}$$

$$= \frac{2^4a^4}{(-b \pm \sqrt{b^2-4ac})^4}.$$

Extrăgând rădăcina 4-a, putem scri încă:

$$\sqrt[4]{b^4 + 2ac(ac-2b^2) \pm \sqrt{[b^4+2ac(ac-2b^2)]^2 - 4a^4c^4}}$$

$$= \frac{2ac\sqrt[4]{2}}{\pm\sqrt{b^2-4ac} - b}.$$

adică tocmai identitatea cerută

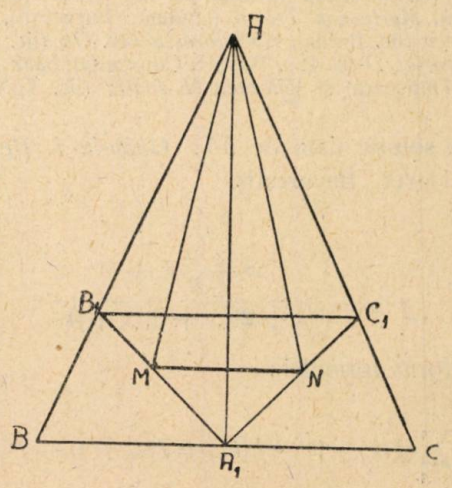
Soluții date de d-nii: *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Secăroiu D-tru* (absolvent).

Alte soluții date de d-nii: *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași) și *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

Observare. D-l *Ghișoiu I. Petre* (lic. Haret, București), a stabilit identități analoage, construind ecuația care are ca rădăcini inversele puterilor a cincea și a șasea a ecuației (1).

775. — *Se dă un triunghiu isoscel* ABC (AB = AC). *Fie* A_1 *piciorul perpendicularei din* A *pe* BC *și* B_1, C_1 *punctele determinate de bisectoarele unghiurilor* AA_1B *și* AA_1C *pe* AB *și* AC. *Bisectoarele unghiurilor* A_1AB *și* A_1AC *determină punctele* M *și* N *pe* A_1B_1 *și* A_1C_1. *Să se arate că patrulaterul* MNB_1C_1 *este un trapez isoscel.*

CEZAR COSNITA



Observăm că triunghiurile AA_1B_1 şi AA_1C_1 sunt egale, având AA_1 comună şi unghiurile din A şi A_1 respectiv egale, rezultă:

(1) $$A_1B_1 = A_1C_1.$$

Tot astfel triunghiurile AA_1M şi AA_1N sunt egale, având AA_1 comună şi unghiurile alăturate ei respectiv egale, rezultă:

(2) $$A_1M = A_1N.$$

Scăzând relaţia (2) din (1), rezultă:

(3) $$MB_1 = NC_1,$$

MN împărţind laturile A_1B_1, A_1C_1 ale triunghiului $A_1B_1C_1$, în părţi proporţionale, căci din (2) şi (3) avem:

$$\frac{A_1M}{MB_1} = \frac{A_1N}{NC_1},$$

rezultă că MN este paralelă cu B_1C_1, şi privind şi egalitatea (3) conchidem uşor că patrulaterul MNB_1C_1 este un trapez isoscel,

Soluţii date de d-nii: *Andrei Radu* (lic. Milit., Iaşi), *Baciu G. Teodor* (Topliceni), *Carp Ignat* (lic. Chişinău), *Chirilă I. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Hamerak C.* (Caransebeş). *Ionescu-Ţiu D. C-tin*, *Lapteş Emil* (lic. Internat, Iaşi), *Lupescu N. Adrian* (lic. Carol, Craiova), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mereuţă Emil* (lic. P.-Neamţ), *Mihalcea I. Emilian* (student), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Negrea A. Mircea* (bacalaureat), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Popescu D. Nicolae*, *Secăroiu D-tru* (absolvent), *Stănescu N. Pompiliu* (lic. Milit., Craiova), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu) şi *Vonica C. Ioan.*

Observare. D-l *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), observă că problema subsistă, chiar dacă A_1B, A_1C, ar fi mediane, simediane, înălţimi pentru triunghiurile AA_1B_1, AA_1C_1, din cauza simetriei faţă de AA_1.

776. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(5+\sqrt{24-x^2})^n - (1-ix)^n = 0,$$

unde $i=\sqrt{-1}$.

V. ALACI

Ecuaţia se mai poate scri:

$$\left(\frac{5+\sqrt{24-x^2}}{1-ix}\right)^n = 1 = e^{2ik\pi}.$$

Extrăgând rădăcina n^a, şi lăsând numai radicalul în primul membru, avem:

$$\sqrt{24-x^2} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(1-ix) - 5, \quad (k=0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Ridicând la patrat obţinem:

$$24-x^2 = e^{\frac{4ik\pi}{n}}(1-ix)^2 - 10e^{\frac{2ik\pi}{n}}(1-ix) + 25$$

$$\therefore\ 1+x^2 = 10\,e^{\frac{2ik\pi}{n}}(1-ix)^2 - e^{\frac{4ik\pi}{n}}(1-ix)^2.$$

Simplificând prin $(1-ix)e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, obţinem:

$$(1+ix)e^{-\frac{2ik\pi}{n}} = 10 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}(1-ix),$$
$$(k=1,\ 2, \ldots n-1).$$

sau:

$$(1) \quad -i\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)x = 10 - \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

Folosind fermulele lui *Euler:*

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i},$$

ecuaţia (1) devine:

$$\sin 2k\pi \,.\, x = 5 - \cos 2k\pi = 6 - 2\cos^2\frac{k\pi}{n},$$

sau:

$$\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\,.\,x = 3 - \cos^2\frac{k\pi}{n} =$$
$$3\sin^2\frac{k\pi}{n} + 2\cos^2\frac{k\pi}{n},$$

de unde:

$$x = 3\,\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n} + 2\cot\frac{k\pi}{n}, \quad (k=1,\ 2, \ldots n-1).$$

Observări. 1, Nici un corespondent n'a soluţionat direct problema,

2. D-nii: *Brotman I.* (Bucureşti), *Chirilă S. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Iacob Şi. Eugen* (Sublocot. de artilerie), *Mihalcea I. Emilian* (student), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Nichiforescu Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu) şi *Vonica C. Ioan*, au soluţionat problema indirect în felul următor:

In articolul „*O clasa de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice*“, din R. M, T., an. VIII, No. 9, se stabileşte că ecuaţia care are rădăcinele:

$$x = a\,\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n} + b\cot\frac{k\pi}{n}, \quad (k=1,\ 2, \ldots n-1),$$

este:

$$(a+b\pm\sqrt{4ab-x^2})^n-(a-b-ix)^n=0.$$

Dasă particularizăm, luând;

$$a=3,\quad b=2,$$

avem tocmai ecuația:

$$(5+\sqrt{24-x^2})^n-(1-ix)^n=0,$$

și deci rădăcinele corespunzătoare sunt:

$$x=3\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}+2\cot\frac{k\pi}{n},\quad (k=1,2,\ldots n-1).$$

3. Tot indirect au soluționat problema și d-nii: *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu) și *Marineanu Traian* (student, București).

Tot în numitul articol citat, se stabilește încă, că ecuația:

$$(a+\sqrt{a^2-b^3-x^2})^n-(b-ix)^n=0,$$

are rădăcinele:

$$x=a\operatorname{cosec}\frac{2k\pi}{n}-b\cot\frac{2k\pi}{n}.$$

Dacă luăm $a=5$, $b=1$, avem tocmai ecuația:

$$(5+\sqrt{24-x^2})^n-(1-ix)^n=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=5\operatorname{cosec}\frac{2k\pi}{n}-\cot\frac{2k\pi}{n},\quad (k=1,2,\ldots n-1),$$

rădăcini care se pot reduce la forma de mai sus.

4. S'au primit și alte soluții greșite.

779 *Să se rezolve sistemul;*

$$\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,tg}y=k_1\pi+a+b\\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-y}{1+xy}=k_2\pi+2a,\end{cases}$$

unde k_1 k_2 *pot avea una din valorile,* $1,\ \pm1,\ \pm2,\ldots\pm n$.

Caz particular: $k_1=k_2=0$, $a=60^0$, $b=30^0$.

ION C. CRISTESCU

Notăm;

$$(1)\qquad \begin{cases}\operatorname{arc\,tg}x=z,\quad \operatorname{arc\,tg}y=t\\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y}{1-xy}=u,\quad \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-y}{1+xy}=v,\end{cases}$$

rezultă:

$$(2)\qquad \begin{cases}x=\operatorname{tg}z,\quad y=\operatorname{tg}t\\ \dfrac{x+y}{1-xy}=\operatorname{tg}u,\quad \dfrac{x-y}{1+xy}=\operatorname{tg}v.\end{cases}$$

Substituind pe x, y din (2), în ultimele două relații, găsim:

$$\frac{\operatorname{tg}z+\operatorname{tg}t}{1-\operatorname{tg}z\operatorname{tg}t}=\operatorname{tg}u,\quad \frac{\operatorname{tg}z-\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}z\operatorname{tg}t}=\operatorname{tg}v,$$

sau:

$$\operatorname{tg}(z+t)=\operatorname{tg}u,\quad \operatorname{tg}(z-t)=\operatorname{tg}v,$$

care dau:

$$(3)\qquad z+t=k_3\pi+u,\quad z-t=k_4\pi+v.$$

Alăturăm acestor ecuații, ecuațiile:

$$(4)\quad z+t=k_1\pi+a+b,\quad u+v=k_2\pi+2a,$$

ce se obțin dacă în sistemul dat, ținem seamă de relațiile (1).

Adunând ecuațiile (3) și ținând seamă de (4), găsim:

$$\begin{cases}z=\dfrac{(k_2+k_3+k_4)\pi}{2}+a\\ t=\left(k_1-\dfrac{k_2+k_3+k_4}{2}\right)\pi+b\end{cases}$$

Deducem de aci, ținând seamă de (2):

$$\begin{cases}x=\operatorname{tg}\left(\dfrac{k\pi}{2}+a\right),\quad (k_2+k_3+k_4=2k,\\ y=\operatorname{tg}\left(\dfrac{m\pi}{2}+b\right),\quad \left(k_1-\dfrac{k_2+k_3+k_4}{2}=m\right)\end{cases}$$

Caz particular:

$$k_1=k_2=0,\quad a=60^0,\quad b=30^0,$$

luăm și $k_3=k_4=0$, și avem:

$$\begin{cases}x=\operatorname{tg}60^0=\sqrt{3}\\ y=\operatorname{tg}30^0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\end{cases}$$

Soluții date de d-nii: *Carp I. Ignat* (Chișinău), *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Hamerak Caroi* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Lapteș E.* (lic. Internat, Iași), *Negrea A. Mircea* (bacalaureat), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Popescu D. Nicolae, Vâlceanu N. Iustin* (absolvent, T.-Jiu) și *Vonica C. Ioan.*

781. — *Se cere patratul perfect a a b c c d, în care suma cifrelor din mijloc dă numărul format de primele două cifre. Suma cifrelor de ordin impar întrece cu 4 unităţi pe aceea a celor de ordin par.*

MIRCEA GROSSU

Conform enunţului trebuie să avem:

$$b + c = a\,a \tag{1}$$

$$d + c + a = a + b + a + 4.$$

Ultima relaţie ne dă:

$$b = d - 4.$$

Cum, $d \geqq 4$ şi e terminaţia de patrat perfect, nu putem lua, decât:

$$d = 4,\ 5,\ 6,\ 9,$$

$$b = 0,\ 1,\ 2,\ 5.$$

Privind relaţia (1), vedem că nu putem avea pentru b valorile 0, sau 1, căci $a\,a \geqq 11$.

Dacă luăm $b = 0$, atunci rezultă $c = 9$ şi $a = 1$.

Dacă luăm $b = 5$, atunci rezultă $c = 6$ şi $a = 1$, fiindcă $11 \leqq a\,a \leqq 18$, fiind suma a două cifre.

Valorile pe care le pot avea cifrele a, b, c, d, se pot scri în tabloul:

d	b	c	a
6	2	9	1
9	5	6	1

Am putea avea numai numerile:

112996 sau 115669,

dar nici unul nu este patrat perfect, deci problema nu admite nici o soluţie.

Au găsit că problema n'admite soluţii, d-nii: *Carp I. Ignat* (Chişinău), *Chirilă. S. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Dimitriu Al. Ioaă* (absolvent, Galaţi), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Murăroiu I.* (lic. Braşov). *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student, Leoben-Austria) şi *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

784. — *Să se arate că expresia:*

$$3x^8 + 2x^4(a^2 + a) + a^2,$$

este suma a trei patrate perfecte.

RAMNICEANU I. CRISTIAN

Putem scri evident:

$$3x^8 + 2x^4(a^2 + a) + a^2 = (x^8 + 2x^4 a + a^2) +$$

$$(x^4 + x^2 a)^2 + (x^4 - x^2 a)^2 = x^4 + a)^2 +$$

$$(x + a x^2)^2 + (x^2 - a^2 x)^2.$$

Soluţii date de d-nii: *Andrei Radu* (lic. Milit., Iaşi), *Brotmann* l. (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Chirilă S. Ioan* (lic, Milit., Iaşi), *Cuciureauu Ştefan* (lic. Milit., Iaşi), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Murăroiu I.* (lic. Braşov), *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti), *Vâlceanu Justin* (Tg.-Jiu) şi *Vonica C. Ioan.*

793. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y + z \\ x^3 + y^3 + z^3 - x\,y\,z = 35 \\ (x + y)(y + z)(z + x) = 30. \end{cases}$$

CEZAR COSNITA

Prima ecuaţie ridicată la cub ne dă:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2 y + 3x\,y^2 + 3x\,z^2 + 3y\,z^2 +$$

$$3(x + y + 2x\,y)\,z = 125.$$

Scăzând din aceasta ecuaţia 2-a şi împărţind apoi cu 3, avem:

$$(1)\quad x^2 y + x y^2 + x^2 z + y^2 z + x z^2 + y z^2 + \frac{7}{3} x y z = 30.$$

Observăm că ecuaţia 3-a a sistemului se poate scri:

$$(2)\qquad (x y + y z + z x + y^2)(z + x) = 30,$$

sau:

$$x^2 y + x y^2 + x^2 z + y^2 z + x z^2 + y z^2 + 2 x y z = 30.$$

Scăzând din (1), găsim:

$$(3)\qquad x y z = 0.$$

In ecuaţia (2) factorul $z + x$, se poate înlocui prin $5 - y$, cum se observă din prima ecuaţie a sistemului, astfel că ecuaţia (2) se poate scri:

$$(x y + y z + z x + y^2)(5 - y) = 30.$$

Ţinând seamă de (3), avem încă:

$$5(x y + y z + z x + y^2) - y^2(5 - y) - y^3 = 30$$

$$\therefore\quad x y + y z + z x = 6.,$$

Aşa dar sistemul dat. este echivalent cu:

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+zx=6 \\ xyz=0. \end{cases}$$

Având cunoscut suma a trei numere, suma produselor câte două şi produsul putem forma ecuaţia:

(4) $$t^3-5t^2+6t=0,$$

ale cărei rădăcini, sunt x, y, z.

Rădăcinele ecuaţiei (4) sunt:

$$t_1=0,\ t_2=2,\ t_3=3.$$

Rezultă, din cauza simetriei, soluţiile:

x	0	0	2	2	3	3
y	2	3	0	3	0	2
z	3	2	3	0	2	0

Soluţii date de d-nii: *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Chirilă S. Ioan* (lic. Milit., Iaşi). *Cuciureanu Ştefan* (lic. Milit., Iaşi). *Dimiiriu At. Ioan* (absolvent, Galati), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Hamerak C.* (Caransebeş), *Ionescu-Jiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Lupescu C-tin* (lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mihalcea I. Emil* (student), *Milea G. E.* (lic. R.-Sărat), *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti), *Popescu D. Ilie*, *Raciu Gh. Raieef* (Turtucaia), *Russu Liviu* (Şc. Polit., Timişoara), *Scarlat D-tru* (Şc. Navală, Constanţa), *Vasiiiu Gh. Gheorghe* (stu ent, Leoben-Austria). *Vâlceanu N. Justin* (absolvent. Tg -Jiu). *Vonica C. Ioan* şi *Zagaican Ilie* (conductor de lucrări publice).

PROBLEME PROPUSE

810. — Se cer patratele perfecte de şase cifre astfel ca numărul format de cifrele întâia, a patra şi a cincea să fie patratul numărului format din cifrele întâia şi a doua, numărul format de ultimele două cifre să fie patratul cifrei a treia, iar numărul format de cifrele a treia, a doua şi a şasea să fie patratul numărului format de cifrele a doua şi a treia şi în acelaş timp cubul ultimei cifre.

TEODOR G. BACIU

811. — Ştiind că cel mai mare comun divizor a şapte numere întregi distincte, luate trei câte trei este 17 şi că cel mai mic multiplu comun al lor aste 6732. să se afle acele numere.

VIRGILIU GR. DANCIULESCU

812. — Două cercuri O_1 şi O_2 se intersectează în A şi B. Să se demonstreze că dacă se poate duce o secantă ACD aşa fel ca $AC=CD$, atunci această egalitate are loc pentru orice secantă dusă prin A (respectiv prin B).

ION PROTOPOPESCU

813. — Fie ABC un triunghiu oarecare. Perpendicularele ridicate în A şi B respectiv pe AC şi BC se taie în C'. La fel obţinem punctele B' şi A'. Dreapta $B'C'$ taie laturile AC şi AB în B'_a şi C'_a. Analog avem punctele B'_c, A'_c şi B'_b, C'_b.

1°. Să se arate că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ sunt egale.

2°. Patrulaterele $B'_aC'_bA'_bB'_c$, $C'_bC'_aB'_cA'_c$ şi $C'_aB'_aA'_cA'_b$ sunt nişte paralelograme.

3°. In ce caz grupele de drepte (AA'_b, BB'_a, CC'_a) şi (AA'_c, BB'_c, CC'_b) sunt concurente?

JUSTIN N. VALCEANU

814. — S se stabilească identitatea:

$$C^3_{p+r}+C^1_{q-r}A^3_{p+r}+C^2_{q-r}C^1_{p+r}+C^3_{q-r}=C^3_{p+q},$$

unde C^n_m înseamnă ombinări de m obiecte luate câte n.

V. ALACI

815. — Să se deriveze funcţiile:

$$y=\arcsin\frac{7y}{\sqrt{x^2+7}},\quad z=\operatorname{arc\,cot}\frac{\sqrt{7-48x^2}}{7x},$$

şi să se explice rezultatul.

MIRCEA A. NEGREA

816. — Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\frac{\operatorname{tg}x+\cot x}{\operatorname{tg}^3x+\cot^3x}+\frac{\operatorname{tg}^2x+\cot x}{\operatorname{tg}^4x+\cot^4x}=2.$$

CEZAR COSNITA

817. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{4}{h_a\,h_b\,h_c}=\frac{1}{r_a\,r_b\,r_c}+\frac{1}{2}\sum(r_a^2\,r_b+r_a\,r_b^2),$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

MARINEANU TRAIAN

INFORMAȚIUNI

Rezultatul la Concursul „R. M. T.“[1])

cl. V.

1. *Petrică Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), 676*, 678, 680*, 681, 683, 685*, 687, 688*, 689, 693*, 698, 703*, 704, 707*, 710, 712, 714*, 717, 718, 720, 737*, 738, 739, 740, 741*, 742*, 744, 746, 748, 749, 750, 751*,

(100).

2. *Oigenstein David* (lic. Bălți), 674, 689, 693*, 705, 706, 707*, 708*, 711*, 730, 732*, 733*, 734.

(42).

Cl. VI.

1. *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea-Dealu), 623, 632, 619, 676*, 678, 683, 684, 685*, 687, 688*, 689, 693*, 694, 697, 698, 704, 705, 706, 707*, 714*, 715, 716, 718, 720, 722, 727, 731, 733*, 734, 736, 737*, 738, 739, 744, 749.

(91).

2. *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iași), 614, 618, 623, 626, 633, 620, 627, 674, 675, 676*, 681, 682*, 684, 687, 688*, 689, 693*, 697, 698, 704, 705, 706, 711*, 713*, 714*.

(64).

3. *Bordeianu Adrian* (lic. Milit., Iași), 618, 626, 620.

(3).

4. *Coșniță Cezar* (lic. Bârlad), 614, 632, 674, 676*, 677*, 678, 680*, 683, 684, 685*, 687, 689, 690, 696*, 697, 698, 701*, 704, 705, 706, 712, 713*, 714*, 716, 717, 718, 719*, 720, 721, 722, 727, 729*, 730, 732*, 733*, 734, 736, 737*, 738, 739, 740, 741*, 742*, 743, 744, 745*, 746, 747, 748, 749, 751*.

(151).

5. *Drăguț G. Vasile* (lic. Târgoviște), 674, 675, 683, 688*, 689, 693*, 696*, 697, 698, 704, 724, 728*, 733*, 736, 737*, 738, 739, 744, 745*, 747*, 748, 749.

(68).

6. *Gheorghe Gh. Mihai* (lic. Milit. Craiova), 603, 614, 618, 623, 626, 632, 619, 620, 627, 674, 675, 676*, 678, 681, 682*, 684, 685*, 687, 688*, 789, 693*, 694, 696*, 700, 705, 706, 707*, 710, 713*, 714*, 716, 717, 718, 720, 721, 722, 724, 727, 730, 733*, 734, 736, 739, 744.

(109).

7. *Ghișoiu Petre* (lic. Spiru-Haret, București), 674, 675, 676*. 677*, 678 682*, 683, 684, 685*, 687, 688*, 689, 693*, 696*, 697, 698, 700, 704, 705, 706, 707*, 708*, 710, 711*, 712, 713*, 714*, 716, 717, 718, 719*, 720, 721, 722, 724, 725*, 726, 727, 730, 732*, 733*, 734, 735, 736, 738, 739, 740, 741*, 742*, 744, 746, 748, 749, 751*.

(165).

1) Problemele rezolvate și numărul total de puncte obținute de fiecare concurent.

8. *Ionescu C. C-tin* (lic. Milit., Iași), 674, 675, 676*, 678, 681, 682*, 684, 685*, 686*, 687, 688*, 689, 697, 698, 704, 705, 706, 707*, 713*, 714*, 718, 727.

(72).

9. *Jacques Levy* (lic. Matei-Basarab, București), 623, 619, 674, 676*, 680*, 681, 687, 688*, 693*, 697, 698, 704, 705, 707*, 711*, 714*, 720, 721, 722, 727, 733*, 740, 741*, 749.

(72).

10. *Murăroiu I.* (lic. Brașov), 625, 619, 674, 675, 676*, 678, 681, 682*, 683, 684, 685*, 686*, 687, 689, 693*, 694, 696*, 697, 698, 701*, 704, 705, 706, 707*, 711*, 712, 713*, 714*, 716, 717, 718, 719*, 720, 722, 726, 727, 728*, 729*, 731, 732*, 733*, 734, 735, 736, 737*, 738, 739, 740, 741*, 742*, 744, 745*, 746, 747, 748, 749, 751*.

(175),

11. *Panaite Teodor* (lic. Milit., Iași), 614, 618, 620, 674, 675, 676*, 681, 682*, 684, 685*, 686*, 687, 688*, 689, 693*, 703*, 705, 706, 707*, 711*, 714*, 718, 720, 724, 726, 727.

(79).

12. *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iași), 614, 618, 624, 626, 633, 619, 620, 674, 675, 676*, 677*, 678, 681, 682*, 683, 684, 685*, 686*, 687, 688*, 689, 694, 697, 698, 701*, 703*, 704, 705, 706, 707*, 711*, 713*, 714*, 716, 717, 718, 720, 722, 724, 727, 728*, 730, 733*, 734, 735*, 736, 738, 741*, 742*, 744, 746, 749, 751*.

(150).

13. *Sassu V. Ioan* (lic. Milit, Tg.-Mureș), 579, 674, 675, 677*, 683, 689, 697, 698, 705, 706, 707*, 730, 733*, 737*, 741*, 749.

(46).

14. *Savin C. Ioan* (lic. Milit., Iași), 579, 618, 623, 624, 626. 619, 620, 674, 675, 676*, 678, 681, 682*, 683, 684, 685*, 686*, 687, 688*, 689, 694, 696*, 697, 698, 703*, 704, 705, 706, 707*, 711*, 712, 713*, 714*, 716, 717, 718, 719*, 720, 721, 722, 725*, 726, 727, 728*, 729*, 730, 731, 732*, 733*, 734, 735, 736, 737*, 738, 740, 741*, 742*, 744, 745*, 746, 748, 749, 751*.

(185).

15. *Silvian Emil* (București), 677*, 683, 706, 716, 719*, 730, 738.

(20).

16. *Sirchis Iosif* (lic. Tighina), 618, 621, 674, 675, 676*, 677*, 681, 684, 688*, 689, 693*, 696*, 697, 698, 699*, 700, 701*, 703*, 704, 705, 706, 707*, 708*, 713*, 714*, 716, 717, 719*, 720, 721, 722, 724, 725*, 727, 728*, 729*, 732*, 733*, 734, 735, 736, 737*, 738, 739, 740, 741*, 742*, 744, 746, 747, 748, 749, 751*, 702*.

(175).

17. *Streit Victor* (lic. Internat, Iași), 674, 675, 681, 689, 697, 698, 705, 706, 707*, 711*, 712, 713*, 714*, 718, 720.

(42).

Va urma rezultatele la cl. VII și a VIII.

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 IUNIE 1929 No. 4

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. T. POPOVICI. ASUPRA UNEI PROBLEME DE ALGEBRA.
2. NOTE MATEMATICE, 10. 11. 12.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 760. 761. 767. 774. 783. 785. 786. 791. 792. 795. 796. 799. 801.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing.-şef C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

ANUL IX — NO. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1929

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Inginer-Șef, C. TEODORESCU
Directorul Școalei Superioare p. t. t. Timișoara

ASUPRA UNEI PROBLEME DE ALGEBRA

de T. POPOVICIU
Paris

1. In anul 1889 printre altele, la examenul de admitere la Școala Normală Superioară din Paris s'a propus și următoarea problemă[1]).

Să se determine un polinom de gradul 7, $f(x)$ astfel ca $f(x)+1$ să fie divizibil prin $(x-1)^4$, iar $f(x)-1$ prin $(x+1)^4$.

Rezultă din acest enunț, în virtutea unei proprietăți bine cunoscute, că derivata $f'(x)$ se divide prin $(x-1)^3$ și prin $(x+1)^3$, trebue deci să avem:

$$f'(x)=C(x-1)^3(x+1)^3, \tag{1}$$

C fiind independent de x. Formula (1) ne sugerează imediat generalizarea ce o putem da problemei noastre. Să rezolvăm întâi problema:

Să se determine polinomul $f(x)$ de gradul $p_1+p_2+\ldots+p_n+k$ astfel ca:

$$f^{(k)}(x)=C(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\ldots(x-\alpha_n)^{p_n} \tag{2}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ fiind n cantități oarecari date, iar $p_1, p_2, \ldots p_n$, n numere întregi pozitive de asemenea date.

Să punem:

$$\varphi(x)=(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\ldots(x-\alpha_n)^{p_n},$$

chestiunea revine deci la integrarea ecuației diferențiale:

$$f^{(k)}(x)=C\varphi(x).$$

Dacă cunoaștem o integrală $f^*(x)$ a acestei ecuații, soluția generală se va obține prin adăogarea unui polinom arbitrar de gradul $k-1$.

1) Problema aceasta e reprodusă în „Culegere de probleme de Algebră" a d-lui *Ioachimescu*.

2. Ne propunem a determina soluția particulară $f^*(x)$ astfel că atât ea cât și primele $k-1$ derivate ale ei să se dividă prin $x-\alpha_1$. Rezultă că:

$$f^*(x)=(x-\alpha_1)^{p_1+k}Q(x),$$

$Q(x)$ fiind un polinom de gradul $p_2+p_3+\ldots+p_n$. In virtutea condiției impuse avem:

$$f^*(x)=C\int_{\alpha_1}^{x}dx\int_{\alpha_1}^{x}dx\ldots\int_{\alpha_1}^{x}\varphi(x)\,dx \tag{3}$$

(k integrale suprapuse),

și $f^*(x)$ e complect determinat.

Dar se cunoaște formula[1]):

$$\int_{\alpha}^{x}dx\int_{\alpha}^{x}dx\ldots\int_{\alpha}^{x}\varphi(x)\,dx=\frac{1}{(k-1)!}\int_{\alpha}^{x}(x-t)^{k-1}\varphi(t)\,dt,$$

astfel că (3) se scrie:

$$f^*(x)=C\frac{1}{(k-1)!}\int_{\alpha_1}^{x}(x-t)^{k-2}\varphi(t)\,dt.$$

Să facem transformarea:

$$t=u(x-\alpha_1)+\alpha_1,$$

limitelor α_1, x vor corespunde pentru u valorile 0, 1. Apoi:

$$dt=(x-\alpha_1)\,du$$

$$x-t=(x-\alpha_2)(1-u)$$

și:

$$\varphi(t)=\varphi[u(x-\alpha_1)+\alpha_1]=$$

$$(x-\alpha_1)^{p_1}u^{p_1}[u(x-\alpha_1)+\alpha_1-\alpha_2]^{p_2}\cdot$$

$$\cdot[u(x-\alpha_1)+\alpha_1-\alpha_3]^{p_2}\ldots[u(x-\alpha_1)+\alpha_1-\alpha_n]^{p_n}$$

1) A se vedea spre exemplu *Goursat* Cours d'Analyse, t. I, p. 354.

sau punând:

$$(4) \qquad \psi(u) = \sum_{i=2}^{n} [u(x-\alpha_1) + \alpha_1 - \alpha_i]^{p_i}$$

$$\varphi(t) = (x-\alpha_1)^{p_1} u^{p_1} \psi(u).$$

Avem deci formula:

$$f^*(x) = \frac{C(x-\alpha_1)^{p_1+k}}{(k-1)!} \int_0^1 u^{p_1} (1-u)^{k-1} \psi(u)\, du$$

3. Vreau să arăt că $f^*(x)$ se poate scrie explicit sub o formă elegantă. Să observăm pentru aceasta că putem scrie:

$$u(x-\alpha_1) + \alpha_1 - \alpha_i = (x-\alpha_i) - (x-\alpha_1)(1-u),$$

deci:

$$[u(x-\alpha_1) + \alpha_1 - \alpha_i]^{p_i} =$$

$$\sum_{j_i=0}^{p_i} (-1)^{j_i} \binom{p_i}{j_i} (1-u)^{j_i} (x-\alpha_1)^{j_i} (x-\alpha_i)^{p_i - j_i},$$

unde:

$$\binom{p_i}{j_i} = \frac{p_i!}{j_i!\,(p_i - j_i)!}$$

deci:

$$\psi(u) = \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} \cdots \sum_{j_n=0}^{p_n} (-1)^{j_2+j_3+\cdots+j_n} \binom{p_2}{j_2} \binom{p_3}{j_3} \cdots$$

$$\cdots \binom{p_n}{j_n} (1-u)^{j_2+j_3+\cdots+j_n} (x-\alpha_2)^{j_2+j_3+\cdots+j_n} \cdot$$

$$\cdot (x-\alpha_2)^{p_2-j_2} (x-\alpha_3)^{p_3-j_3} \cdots (x-\alpha_n)^{p_n-j_n},$$

prin urmare:

$$(5) \qquad f^*(x) = \frac{C(x-\alpha_1)^{p_1+k}}{(k-1)!} \cdot \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} \cdots$$

$$\cdots \sum_{j_n=0}^{p_n} A_{j_2, j_3, \ldots j_n} \cdot (x-\alpha_1)^{j_2+j_3+\cdots+j_n} \cdot$$

$$\cdot (x-\alpha_2)^{p_2-j_2} (x-\alpha_3)^{p_3-j_3} \cdots (x-\alpha_n)^{p_n-j_n}.$$

unde:

$$A_{j_2, j_3, \ldots j_n} = (-1)^{j_2+j_3+\cdots+j_n} \binom{p_2}{j_2} \binom{p_3}{j_3} \cdots \binom{p_n}{j_n} \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 u^{p_1} (1-u)^{j_2+j_3+\cdots+j_n+k-1}\, du.$$

Dar se cunoaște formula:

$$\int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1}\, du = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!},$$

care nu e altceva decât funcția euleriană $B(m, n)$. Rezultă că:

$$A_{j_2, j_3, \ldots j_n} = (-1)^{j_2+j_3+\cdots+j_n} \binom{p_2}{j_2} \binom{p_3}{j_3} \cdots \binom{p_n}{j_n} \cdot$$

$$\cdot \frac{p_1!\,(j_2+j_3+\cdots+j_n+k-1)!}{(p_1+j_2+j_3+\cdots+j_n+k)!}.$$

Soluția ecuației (2) este deci:

$f(x) = f^*(x) +$ polinom arbitrar de gradul $k-1$

4. Problema inițială o generalizăm astfel:

Să se determine polinomul de gradul $p+q+k$ $f(x)$ *astfel ca* $f(x)+P(x)$ *să fie divizibil pri* $(x-\alpha)^{p+k}$, *iar* $f(x)+Q(x)$ *prin* $(x-\beta)^{q+k}$. $P(x$ $Q(x)$ *fiind două polinoame date de gradul* $k-$

Avem în acest caz:

$$n = 2;\ \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta;\ p_1 = p,\ p_2 = q$$

deci:

$$(5') \qquad f^*(x) = \frac{C(x-\alpha)^{p+k}}{(k-1)!} \times$$

$$\sum_{i=1}^{q} (-1)^i \binom{q}{i} \frac{p!\,(k+i-1)!}{(p+k+i)!} (x-\alpha)^i (x-\beta)^{q-}$$

și dacă $R(x)$ este polinomul arbitrar de gradu $k-1$ ce trebue adaus lui $f^*(x)$ pentru a avea p $f(x)$, avem:

$$f^*(\alpha) + R(\alpha) + P(\alpha) = 0$$

$$f^*(\alpha) + R'(\alpha) + P'(\alpha) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{*(k-1)}(\alpha) + R^{(k-1)}(\alpha) + P^{(k-2)}(\alpha) = 0,$$

comune:

$$f^*(\alpha) = f^{*\prime}(\alpha) = \ldots = f^{*(k-2)}(\alpha) = 0,$$

rezultă că polinoamele $R(x)$, $P(x)$ au o sumă ide tic nulă, deci:

$$R(x) \equiv -P(x).$$

Deja se vede că $Q(x)$ nu poate fi oricare. Tr bue să avem încă:

$$f^*(\beta) + R(\beta) + Q(\beta) \equiv f^*(\beta) + Q(\beta) - P(\beta) = 0$$

$$f^*(\beta) + R'(\beta) + Q'(\beta) \equiv f^{*\prime}(\beta) + Q'(\beta) - P'(\beta) =$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{*(k-1)}(\beta)+R^{(k-1)}(\beta)+Q^{(k-1)}(\beta)\equiv$$
$$f^{*(k-1)}(\beta)+Q^{(k-1)}(\beta)-P^{(k-1)}(\beta)=0.$$

Inmulțind aceste ecuații respectiv cu 1:

$$\frac{x-\beta}{1!},\ \frac{(x-\beta)^2}{2!},\ \ldots\ \frac{(x-\beta)^{k-1}}{(k-1)!}$$

și ținând seamă de formula lui *Taylor* avem:

$$(6)\qquad Q(x)=P(x)-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(x-\beta)^i}{i!}f^{*(i)}(\beta)$$

care nu conține ca arbitrar decât constanta C. Cantitățile $f^{*(i)}(\beta)$ se pot ușor calcula.

Dacă $k=1$; $P(x)=a$, $Q(x)=b$ două constante oarecare însă ne-egale iar ecuația (6) va determina pe C.

In acest caz:

$$f^*(\beta)=(-1)^q\frac{C\,q!\,p!}{(p+q+1)!}(\beta-\alpha)^{p+q+1},$$

și se deduce imediat:

$$C=(-1)^q\frac{(p+q+1)!}{p!\,q!}\cdot\frac{a-b}{(\beta-\alpha)^{p+q+1}}.$$

Polinomul cerut este, după o ușoară modificare:

$$f(x)=\frac{(a-b)(x-\alpha)^{p+1}}{(\beta-\alpha)^{p+q+1}}\times$$
$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^q\binom{p+q+1}{i}(x-\alpha)^{q-i}(x-\beta)^i-a.$$

5. Pentru a arăta diversitatea problemelor ce se pot trata cu ajutorul formulelor noastre să studiem următoarea:

Să se determine polinomul de gradul $p+q+2$, $k(x)$ *astfel ca* $f(x)+ax+b$ *să fie divizibil prin* $(x-\alpha)^{p+2}$ *iar* $f'(x)+c$ *prin* $(x-\beta)^{q+1}$.

Trebue să avem:

$$f''(x)=C(x-\alpha)^p(x-\beta)^q,$$

suntem deci în cazul:

$$k=2,\ n=2;\ \alpha_1=\alpha,\ \alpha_2=\beta;\ p_1=p,\ p_2=q.$$

Formula (5′) dă:

$$f^*(x)=\frac{C(x-\alpha)^{p+2}}{1!}\times$$
$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\binom{q}{i}\frac{p!\,(i+1)!}{(p+i+2)!}(x-\alpha)^i(x-\beta)^{q-i}.$$

Găsim întâi ca mai sus:

$$R(x)\equiv -ax-b,$$

pe urmă:

$$f^{*\prime}(\beta)-a+c=0,$$

care determină pe C. Avem:

$$f^{*\prime}(\beta)=(-1)^q\frac{C\,.\,p!\,q!}{(p+q+1)!}(\beta-\alpha)^{p+q+1},$$

deci:

$$C=(-1)^q\frac{(p+q+1)!}{p!\,q!}\cdot\frac{a-c}{(\beta-\alpha)^{p+q+1}},$$

și:

$$f(x)=\frac{(a-c)(x-\alpha)^{p+2}}{(\beta-\alpha)^{p+q+1}}\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\frac{q-i+1}{p+q-i+2}\binom{p+q+1}{i}(x-\alpha)^{q-i}(x-\beta)^i-ax-b.$$

Cum trebue să presupunem $\beta\neq\alpha$, condiția de posibilitate a problemei este:

$$a\neq c.$$

NOTE MATEMATICE

10. *Asupra problemei 750.*

Enunțul acestei probleme este următorul:

Să considerăm polinoamele:

$$\varphi_1(x)=x^8+28x^6-70x^4+28x^2$$

$$\varphi_2(x)=x^6-7x^4+7x^2-1.$$

Să se rezolve ecuația:

$$\varphi_1(x)-8ix\varphi_2(x)-1-0,\quad (i=\sqrt{-1}).$$

Să considerăm problema mai generală.

Fie polinoamele:

$$\varphi_1(x)=x^{2n}+C_{2n}^2x^{2n-2}-C_{2n}^4x^{2n-4}+\ldots$$
$$\ldots-(-1)^{n-1}C_{2n}^{2n-2}x^2$$

$$\varphi_2(x)=C_{2n}^1x^{2n-2}-C_{2n}^3x^{2n-4}+\ldots$$

Să se rezolve ecuația:

$$\varphi_1(x)-ix\varphi_2(x)-(-1)^n=0,\qquad (i=\sqrt{-1})$$

Inlocuind în ecuație valorile lui $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, avem:

$$2x^{2n} - (x^{2n} + C_{2n}^{1} x^{2n-1} i + C_{2n}^{2} x^{2n-2} i^2 +$$

$$C_{2n}^{3} x^{2n-3} i^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} x i^{2n-1} + C_{2n}^{2n} i^{2n}) = 0.$$

Sau încă:

$$2x^{2n} - (x+i)^{2n} = 0$$

$$\left[\frac{x+i}{x\sqrt[2n]{x}}\right]^{2n} = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi.$$

De aci avem:

$$\frac{x+i}{x\sqrt[2n]{2}} = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}, \quad [k=0, 1, 2, \ldots 2n-1.$$

Rezolvind în raport cu x, găsim:

$$x = \frac{i}{\sqrt[2n]{2}\left(\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right) - 1}, \quad (k=0.\ 1, 2, \ldots 2n-1).$$

Pentru $n=4$ avem ecuația problemei 750.

GHISOIU I. PETRE

11. *Asupra problemei 728 din R. M. T.*

Imi propun în cele ce urmează a da o nouă soluție acestei probleme care se întrebuințează foarte des la aflarea centrelor de greutate a diferitelor figuri geometrice și care soluție va fi diferită de cele două date în R. M. T., (pag. 9, No. 1, an. IX).

Știm în general că $r = \frac{s}{p}$.

Apoi:

$$AB = a\sqrt{2},\ CD = a,\ OM_1 = a\sqrt{2},\ OM_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r_1 = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)a,\quad r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Se știe în general că centrul de greutate a unei figuri oarecari geometrică se află o dreaptă de simetrie a acelei figuri sau pe un diametru a ei.

Dacă figura admite două, trei... sau n drepte de simetrie, două din ele prin intersecția lor ne dă centrul de greutate a figurii considerate. Cum centrul de greutate se află pe fiecare din două, trei sau n drepte urmează că ele vor fi neapărat concurente în centrul de greutate a figurii considerate.

Se știe apoi că momentul static a suprafeței unei figuri oarecare față de un ax baricentric este nul.

In figura considerată dreapta $M_1 M_2$ fiind o dreaptă de simetrie evident centrul de greutate a figurii se va afla neapărat pe această dreaptă. Dintr'o infinitate de drepte ce trec prin centrul de greutate și față de care momentul static este nul vom alege o dreaptă perpendiculară pe $M_1 M_2$ și însemnăm distanța ei dela centru cu x care va fi necunoscuta problemei.

In locul cercurilor scoase introducem suprafețe echivalente și vom avea succesiv luând momentul static al figurii față de Δ.

$$(1)\quad \left[\pi a^2 x - \pi\frac{a^2}{4}(2-\sqrt{2})^2 (O_4 O + x) + \frac{3\pi a^2}{36}(O_6 O - x)\right] = 0.$$

Dar:

$$O_4 O = M_1 O - r_1 = a\sqrt{2} - a,$$

iar:

$$O_6 O = O M_2 - r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Inlocuind valorile lui $O_4 O$ și $O_6 O$ în (1) și scoțând pe πa^2 factor vom avea făcând calculele:

$$\pi a^2 \left\{3x(12\sqrt{2}-7) - (90\sqrt{2} - \sqrt{3} - 126)a\right\} = 0.$$

Sau:

$$3x(12\sqrt{2}-7) = (90\sqrt{2} - \sqrt{3} - 126)a$$

$$x = \frac{(90\sqrt{2} - \sqrt{3} - 126)a}{3(12\sqrt{2}-7)}.$$

Adică tocmai rezultatul dat la pag. 9, No. 1, an. IX, în R. M. T.

Se vede că această metodă de a calcula centrul de greutate al unei figuri oarecare este foarte simplă și se aplică cu ușurință la problemele de acest gen.

ZAGAICAN ILIE
Conductor de lucrări publice
Serv. Technic Bălți

12. *Generalizarea problemei 765,*

In această notă îmi propun să dau o altă soluție problemei 765 decât cea dată în R. M. T., vol. IX, pag. 22, unde a fost rezolvată și în același

timp să o generalizez, adică îmi propun să stabilesc inegalitatea:

$$h_a^n r_a^{2n} + h_b^n r_b^{2n} + h_c^n r_c^{2n} \geq 3 r_a^n r_b^n r_c^n.$$

Plec dela inegalitatea cunoscută:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 3\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

unde fac înlocuirea:

$$x_1 = h_a^n r_a^{2n}, \quad x_2 = h_b^n r_b^{2n}, \quad x_3 = h_c^n r_c^{2n},$$

şi obţin:

$$(1) \quad h_a^n r_a^{2n} + h_b^n r_b^{2n} + h_c^n r_c^{2n} \geq 3\sqrt[3]{h_a^n h_b^n h_c^n r_a^{2n} r_b^{2n} r_c^{2n}}$$

Dar:

$$h_a h_b h_c = \frac{8S^3}{abc} = \frac{8S^3}{4RS} = \frac{2S^2}{R} = \frac{2r r_a r_b r_c}{R}.$$

Inegalitatea (1) devine:

$$h_a^n r_a^{2n} + h_b^n r_b^{2n} + h_c^n r_c^{2n} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{2r}{R}\right)^n r_a^{3n} r_b^{3n} r_c^{3n}}$$

$$h_a^n r_a^{2n} + h_b^n r_b^{2n} + h_c^n r_c^{2n} \geq 3 r_a^n r_b^n r_c^n \sqrt[3]{\left(\frac{2r}{R}\right)^n}.$$

Şi cum:

$$\frac{2r}{R} \leq 1. \quad \text{(R. M. T., vol. VIII, pag. 68).}$$

Rezultă că:

$$h_a^n r_a^{2n} + h_b^n r_c^{2n} + h_c^n r_c^{2n} \geq 3 r_a^n r_b^n r_c^n.$$

JUSTIN N. VALCEANU

BIBLIOGRAFIE

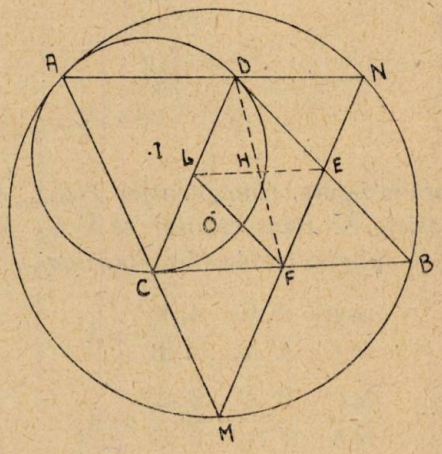
1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, No. 9, Mai 1929.

Rezultatul concursului „Gazetei Matematice" din anul 1929, de *G. Ţiţeica*. Metodologia matematicilor (urmare), de, † *N. C. Segârceanu*. Asupra rezolvării în întregi a ecuaţiunii, $a X^2 + 2b XY + c Y^2 = d Z^n$, de *Gh. Constantinescu*. Asupra sumei puterilor asemenea a termenilor unor şiruri, de *Popovici C. C-tin.*

PROBLEME REZOLVATE

760. — *Se dă un cerc* I *tangent interior unui cerc* O, *în punctul* A. *Dintr'un punct oarecare* B *luat pe cercul* O, *se duc tangentele la cercul* I *în* C *şi* D. *Dreptele* AC *şi* AD *întâlnesc cercul* O *în* M *şi* N. *Dreapta* MN *taie tangentele în* F *şi* E. *Paralela la* FC *ce pleacă din* E, *taie dreapta* CD *în* L. *Să se arate că punctele* F, D *şi mijlocul dreptei* EL *sunt colineare.*

SANDULESCU I IOAN



Construim figura în condiţiile problemei. Unghiurile ADC şi ANM sunt egale, căci arcele AC şi AM au acelaşi număr de grade, ceiace se observă uşor ducând diametrul comun OIA, rezultă atunci că CD e paralelă cu MN.

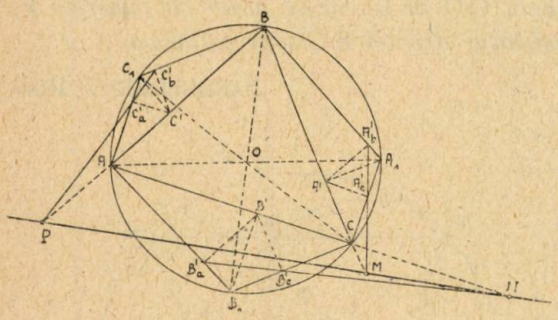
Fiindcă, EL ∥ CB, FE ∥ CD, urmează că şi LF ∥ DB. Figura LDEF este astfel un paralelogram şi deci HD = HF, adică paralela EL trece prin mijlocul E a lui BD. Cum EF e paralelă cu CD, rezultă că şi F e mijlocul lui CB.

Cum DH trece prin mijlocul lui LE, trebue să treacă şi prin mijlocul paralelei sale CB, adică prin F. Punctele D, H, F sunt deci colineare.

Soluţii date de d-nii: *Carp I. Ignat* (Chişinău), *Drig P. Petru* (lic. Milit. Tg.-Mureş), *Grossu J. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mihalcea Emil* (student), *Popa O. Ioan* (lic. Oltenita) şi *Ştiopu Porfir.*

761. — *Se dă un triunghiu* ABC *înscris în cercul* O *şi fie* A_1, B_1, C_1 *diametral opuse vârfurilor, iar* A', B', C' *proecţiile lui* A_1, B_1, C_1, *respectiv pe* BC, CA, AB. *Insemnăm apoi cu* $A'_b, A'_c, B'_c, B'_a, C'_a, C'_b$, *proecţiile lui* A', B', C' *respectiv pe* $A_1B, A_1C, B_1C. B_1A, C_1A, C_1B$. *Să se arate că dreptele* $A'_bA'_c$, $B'_cB'_a$, $C'_aC'_b$, *taie pe* BC, CA, AB *în trei puncte coliniare.*

CEZAR COSNITA



Construim figura, triunghiurilor BA_1C, CB_1A, AC_1B tăiate de transversalele $MA'_cA'_b$, $NB'_cB'_a$, $PC'_aC'_b$, le aplicăm teorema lui *Menelaus*, şi avem:

$$(1)\qquad \frac{MB}{MC}\cdot\frac{A'_cC}{A'_cA_1}\cdot\frac{A'_bA_1}{A'_bB}=1,$$

$$(2)\qquad \frac{NC}{NA}\cdot\frac{B'_aA}{B'_aB_1}\cdot\frac{B'_cB_1}{B'_cC}=1,$$

$$(3)\qquad \frac{PA}{PB}\cdot\frac{C'_bB}{C'_bC_1}\cdot\frac{C'_aC_1}{C'_aA}=1.$$

Dar din triunghiurile dreptunghice, $A_1A'B$, $A_1A'C$, $B_1B'C$, $B_1B'A$, $C_1C'A$, $C_1C'B$, deducem:

$$\frac{A'_bA_1}{A'_bB}=\frac{\overline{A'A_1}^2}{\overline{A'B}^2},\quad \frac{A'_cC}{A'_cA}=\frac{\overline{A'C}^2}{\overline{A'A_1}^2},$$

$$\frac{B'_cB_2}{B'_cC}=\frac{\overline{B'B_1}^2}{\overline{B'C}^2},\quad \frac{B'_aA}{B'_aB_1}=\frac{\overline{B'A}^2}{\overline{B'B_1}^2},$$

$$\frac{C'_aC_1}{C'_aA}=\frac{\overline{C'C_1}^2}{\overline{C'A}^2},\quad \frac{C'_bB}{C'_bC_1}=\frac{\overline{C'B}^2}{\overline{C'C_1}^2}.$$

Rezultă deci:

$$\frac{A'_cC}{A'_cA_1}\cdot\frac{A'_bA_1}{A'_bB}=\frac{\overline{A'C}^2}{\overline{A'B}^2},\quad \frac{B'_aA}{B'_aB_1}\cdot\frac{B'_cB_1}{B'_cC}=\frac{\overline{B'A}^2}{\overline{B'C}^2},$$

$$\frac{C'_bB}{C'_bC_1}\cdot\frac{C'_aC_1}{C'_aA}=\frac{\overline{C'B}^2}{\overline{C'A}^2}.$$

Relaţiile (1), (2), (3), devin astfel:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{\overline{A'C}^2}{\overline{A'B}^2}=1,\quad \frac{NC}{NA}\cdot\frac{\overline{B'A}^2}{\overline{B'C}^2}=1,\quad \frac{PA}{PB}\cdot\frac{\overline{C'B}^2}{\overline{C'A}^2}=1$$

Inmulţind aceste relaţii, avem:

$$(4)\qquad \frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}\cdot\left(\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{C'B}{C'A}\right)^2=1.$$

Din triunghiurile dreptunghice $AA'C$ şi $A_1A'B$ deducem însă:

$$A'C=A_1C\cos\frac{A_1OB}{2},\quad A'B=A_1B\cos\frac{A_1OC}{2}.$$

Analog avem:

$$B'A=B_1A\cos\frac{\overset{\frown}{B_1OC}}{2},\quad B'C=B_1C\cos\frac{\overset{\frown}{B_1OA}}{2}$$

$$C'B=C_1B\cos\frac{\overset{\frown}{C_1OA}}{2},\quad C'A=C_1A\cos\frac{\overset{\frown}{C_1OB}}{2}.$$

Deducem:

$$\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{C'B}{C'A}=\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}\times$$

$$\frac{\cos\frac{A_1OB}{2}}{\cos\frac{A_1OC}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{B_1OC}{2}}{\cos\frac{B_1OA}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{C_1OA}{2}}{\cos\frac{C_1OB}{2}}.$$

Dar:

$$\overset{\frown}{A_1OC}=\overset{\frown}{C_1OA},\quad \overset{\frown}{A_1OB}=\overset{\frown}{B_1OA},\quad \overset{\frown}{B_1OC}=\overset{\frown}{C_1OB}$$

şi:

$$A_1C=C_1A,\quad A_1B=AB_1,\quad C_1B=B_1C,$$

deci:

$$\frac{A'C}{A'B}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{B'C}{C'A}=-1,$$

şi atunci relaţia (4) devine:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1,$$

ceiace dovedeşte că punctele M, N, P sunt coliniare.

Soluţii date de d-l *Vâlceanu N. Justin* (absolvent. lic. Tg.-Jiu),

767. — *Dacă m și n sunt numere prime de o singură cifră, să se găsească numărul* $N = 2^3 . 3^2 . m . n$, *știind că câtul dintre suma divizorilor numărului* N *prin* N *este* $\frac{13}{2}$.

ISTINIE I. BREZUICA

Dacă un număr N descompus în factori primi e de forma:

$$N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

atunci știm că suma divizorilor lui S (N) este:

$$S(N) = \frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1} \cdot \frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1} \cdot \frac{c^{\gamma+1} - 1}{c - 1} \cdots$$

In cazul nostru, avem:

$$S(N) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{m^2 - 1}{m - 1} \cdot \frac{n^2 - 1}{n - 1} =$$

$$15 . 13 . (m + 1)(n + 1).$$

Conform enunțului trebue să avem:

$$\frac{15 . 13 . (m + 1)(n + 1)}{2^3 . 3^2 . m . n} = \frac{13}{2},$$

de unde rezultă:

$$5(m + 1)(n + 1) = 12\, m . n.$$

Trebue ca unul din factorii m sau n să se dividă cu 5, ori cum ei sunt primi și de o cifră, nu putem lua de exemplu decât:

$$m = 5,$$

în care caz deducem:

$$6(n + 1) = 12\, n,$$

deci, $n = 1$.

Numărul căutat este:

$$N = 2^3 . 3^2 . 5 = 360.$$

Soluții date de d-nii: *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab București), *Carp I. Ignat* (Chișinău), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Glatz Sanda*, *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Nichiforescu Gh.* (lic. Internat, Iași), *Murăroiu I.* (lic. Brașov) și *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

774. — *Să se găsească cifrele a și b astfel ca:*

$$(8\, a\, 8)^n - (3\, b\, 3)^n = \text{mult. } 9.$$

SAVIN C. IOAN

Observăm că:

$$8\, a\, 8 = \text{mult. } 9 + (a - 2)$$

$$3\, b\, 3 = \text{mult. } 9 + (b - 3),$$

rezultă:

$$(8\, a\, 8)^n - (3\, b\, 3)^n = \text{mult. } 9 + (a - 2)^n - (b - 3)^n.$$

Evident că dacă:

$$a - 2 = b - 3,$$

adică:

$$(1) \qquad b = a + 1,$$

atunci oricare ar fi n expresia dată e multiplu de 9. Relația (1), ne dă pentru cifrele a și b, valorile:

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1

Evident că putem lua încă și $a = 8$, $b = 0$. Ar fi de văzut încă dacă n'am putea avea:

$$(a - 2)^n - (b - 3)^n = \text{mult. } 9,$$

ceiace nu ne dă nici o soluție dacă n este oarecare.

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petre* (absolvent, Caransebeș), *Bolgar V. D-tru* (lic. Oltenița), *Carp Ignat* (absolvent, lic. Chișinău), *Cincilian Agop* (lic. Brașov) *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galati), *Gavrilescu D.* (lic. Brașov), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Hamerak Carol* (Caransebeș), *Ionescu P. Haralambie* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Mihalcea Emil* (lic. Buzău), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Murăroiu I.* (lic. Brașov), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu) și *Vonica C. Ioan.*

783. — *Fie h''_a, h''_b, h''_c segmentele de înălțimi cuprinse între ortocentru și laturi, într'un triunghiu* ABC; *k_a, k_b, k_c distanțele centrului cercului circumscris la laturi. Să se stabilească relațiile:*

$$a\, h''_a + b\, h''_b + c\, h''_c = 2\, s$$

$$a\, k_b\, k_c + b\, k_c\, k_a + c\, k_a\, k_b = R\, s.$$

celelalte notații fiind cele obișinuite.

I. MURAROIU

Plecăm dela relația:

$$\sin(A + B + C) = 0,$$

pe care o dezvoltăm, avem:

$$\sin(A + B)\cos C + \cos(A + B)\sin C = 0,$$

sau:

1) $\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C.$

Folosind relaţiile cunoscute:

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \cos B \cos C = \frac{h_a''}{2R}$$

şi analoagele lor, (Compléments de Trigonométrie, par F. G. M., pag. 183), relaţia (1) devine:

$$\frac{a h_a''}{4R^2} + \frac{b h_b''}{4R^2} + \frac{c h_c''}{4R^2} = \frac{abc}{8R^3}.$$

de unde deducem:

$$a h_a'' + b h_b'' + c h_c'' = \frac{abc}{2R} = \frac{4Rs}{2R} = 2s,$$

adică prima relaţie cerută.

Pentru a stabili relaţia 2-a, folosim egalităţile cunoscute:

$$\cos A = \frac{k_a}{R}, \quad \sin A = \frac{a}{2R}$$

şi analoagele lor, atunci relaţia (1) devine:

$$\frac{a k_b k_c}{2R^3} + \frac{b k_c k_a}{2R^3} + \frac{c k_a k_b}{2R^3} = \frac{abc}{8R^3},$$

de unde:

$$a k_b k_c + b k_c k_a + c k_a k_b = \frac{abc}{4} = Rs,$$

şi avem astfel a 2-a relaţie cerută.

Observare. Prima relaţie cerută, scrie că suprafaţa triunghiului ABC este egală cu suma suprafeţelor triunghiurilor CHB, AHC şi AHB, H fiind ortocentru.

Soluţii date de d-nii: *Carp I. Ignat* (Chişinău), *Costăchescu V. C-tin* (Şc. Navală), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Mihalcea Emil* (student). *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit., Iaşi), *Silachi Aureliu* (lic. Oradea), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* şi *Yves A. Jijie* (student).

785. — *Să se rezolve sistemul:*

$$(z + x - y)(x + y - z) = a x$$
$$(x + y - z)(y + z - x) = b y$$
$$(y + z - x)(z + x - y) = c z.$$

CEZAR COSNITA

Notăm:

$$y + z - x = t, \quad z + x - y = u, \quad x + y - z = v,$$

de unde rezultă:

$$(1) \quad x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \frac{v + t}{2}, \quad z = \frac{t + u}{2}.$$

Sistemul propus devine:

$$\frac{t + u}{t u} = \frac{2}{c}, \quad \frac{v + t}{v t} = \frac{2}{b}, \quad \frac{u + v}{u v} = \frac{2}{a},$$

sau:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{u} = \frac{2}{c}, \quad \frac{1}{v} + \frac{1}{t} = \frac{2}{b}, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{a}.$$

Adunăm aceste ecuaţii, împărţim rezultatul cu 2, şi în urmă scădem succesiv ecuaţiile sistemului, avem:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$
$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c},$$

de unde:

$$t = \frac{abc}{bc + ca - ab}, \quad u = \frac{abc}{ab + bc - ca},$$
$$v = \frac{abc}{bc + ca - ab}.$$

Inlocuind aceste valori în (1), găsim soluţiile sistemului:

$$x = \frac{a b^2 c^2}{(ab + bc - ca)(bc + ca - ab)},$$
$$y = \frac{b c^2 a^2}{(bc + ca - ab)(ca + ab - bc)},$$
$$z = \frac{c a^2 b^2}{(ca + ab - bc)(ab + bc - ca)}.$$

Soluţii date de d-nii: *Carp I. Ignat* (absolvent, Chişinău), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti) şi *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, lic. Tg.-Jiu).

786. — *Să se formeze ecuaţia algebrică ale cărei rădăcini sunt:*

$$x = \frac{1}{a + b \sin^2 \frac{k\pi}{2}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n - 1).$$

V. ALACI

Folosim metoda din articolul „*O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice*“ R. M. T., vol. VIII, No. 9. In adevăr putem scri în virtutea formulelor lui *Euler:*

$$x=\frac{1}{a+b\left(\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2i}\right)^2},$$

unde dacă punem:

$$e^{\frac{ik\pi}{n}}=t, \qquad (i=\sqrt{-1})$$

avem:

$$x=\frac{1}{a-\frac{b}{4}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{4t^2}{4at^2-bt^4+2bt^3-b}$$

$$\therefore \quad bxt^4-2(2ax+bx-2)t^2+bx=0.$$

De aci deducem:

$$t^2=\frac{2ax+bx-2\pm\sqrt{(2ax+bx-2)^2-b^2x^2}}{bx}$$

Ridicând la puterea n^a, şi observând că:

$$t^{2n}=e^{2ik\pi}=1,$$

avem ecuaţia cerută:

$$[2ax+bx-2\pm 2\sqrt{(ax-1)(ax+bx-1)}]^n-b^nx^n=0.$$

Soluţii date de d-nii: *Carp I. Ignat* (Chişinău), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Gavrilescu V.* (lic. Braşov), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Lupescu C-tin* (lic. Roman), *Mihalcea Emil* (student) şi *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu).

791. — *Doi jucători* A *şi* B *se învoesc ca cel ce va pierde să întreiască banii câştigătorului din care să-şi reţină pentru sine* 2 *lei. Câţi bani a avut* A *ştiind că după patru jocuri câştigătoare consecutive a rămas cu un leu.*

I. DIMITAIU-ARAD

Fie x suma avută de jucătorul A la începutul jocului.

Conform enunţului, trebuie să avem:

$$3\{3[3(3x-2)-2]-2\}-2=1$$

$$\therefore \quad 81x-3^3\times 2-3^2\times 2-3\times 2-2-1=0,$$

de unde:

$$x=1.$$

Generalizare. Dacă câştigătorul A, ar fi câştigat n partide consecutive, am fi găsit, procedând analog:

$$x=\frac{1+2+3\times 2+3^2\times 2+\ldots+3^{n-1}\times 2}{3^n}=1.$$

Soluţii date de d-nii: *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Mihalcea I. Emil* (student), *Millea G. E.* (lic. R.-Sărat), *Tutoveanu* (absolvent, Roman), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* şi *Zagaican Ilie* (conductor lucrări publice, Bălţi).

792. — *Să se pună sub formă de doi radicali simpli, expresiunea:*

$$E=\sqrt{a+2+\sqrt{4(a-1)+3b(2a-3b)}}.$$

SUBLOCOT. NEGOESCU I. PETRE

Se ştie că o expresie de forma:

$$E=\sqrt{A+\sqrt{B}},$$

se poate descompune într'o sumă de doi radicali simpli, dacă:

(1) $\quad A^2-B=C^2$, (A, B, N numere raţionale),

în care caz avem:

$$(2) \qquad \sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}.$$

In exemplu dat, avem:

$$A^2-B=(a+2)^2-4a-4-6ab+9b^2=$$
$$a^2-6ab+9b^2=(a-3b)^2=C^2.$$

Condiţia (1) fiind împlinită urmează:

$$E=\sqrt{a+2+\sqrt{4(a+1)+3b(2a-3b)}}=$$
$$\sqrt{\frac{2a-3b+2}{2}}+\sqrt{\frac{3b+2}{2}}.$$

Soluţii date de d-nii: *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Carp I. Ignat* (Chişinău), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Cuciureanu Ştefan* (lic. Milit., Iaşi), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Drăguţ Gh. Vasile* (lic. Târgovişte), *Dumitrescu V. C-tin* (lic. Focşani), *Ghişoiu I, Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol. Craişova), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti) *Mihalcea I. Emil* (lic. Buzău), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti), *Nichiforescu Gh. Gh.* (lic. Inter-

nat, Iaşi), *Petrovici D-tru* (stndent), *Raciu Gh. Raicef* (Turtucaia), *Scarlat D-tru* (Şc. Navală, Constanţa), *Tutoveanu Valeriu* (absolvent, Roman), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (student, Leoben-Austria), *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* şi *Zagaican Ilie* (conductor de lucrări publice, Bălţi).

Au mai trimes soluţii d-nii: *Fericeanu Ştfan* (siudent, Bucureşti) şi *Ţiucra Mirrea* (lic. Timişoara).

795. — *Se cere restul împărţirii numărului:*

$$N = 17^{19} - 289^{36} + 4992^{54} + 84881^{72},$$

prin 18.

SAVIN C. ION

Avem;

$$17^{18} = (18-1)^{18} = m \cdot 18 + 1$$

$$289^{36} = (m \cdot 18 + 1)^{36} = m \cdot 18 + 1$$

$$4993 = (m \cdot 18 + 7)^{54} = m \cdot 18 + 7^{54} = m \cdot 18 + 343^{18} = m \cdot 18 + (m \cdot 18 + 1)^{18} = m \cdot 18 + 1$$

$$84881 = (m \cdot 18 - 7)^{72} = m \cdot 18 + (-17)^{72} = m \cdot 18 + (343)^{24} = m \cdot 18 + 1.$$

Rezultă atunci:

$$N = m \cdot 18 + 2.$$

Restul cerut este 2.

Soluţii date de d-nii: *Boerescu P. George* (lic. Oltenița), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Schuller David* (absolvent) şi *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg,-Jiu).

S'au primit şi multe soluţii greşite.

796. — *Să se afle suma produselor două câte două a primelor n numere dtvizibile prin 13.*

RAMNICEANU I. CRISTIAN

Primele n numere divizibile cu 13, sunt:

$$1 \times 13,\ 2 \times 13,\ n \times 13,$$

iar S suma cerută se poate scri succesiv:

$$S = 13^2[1.2 + 1.3 + \ldots + 1.n + 2.3 + 2.4 + \ldots + (n-1)n] =$$

$$13^2\left[\frac{(1+2+\ldots+n)^2 - (1^2+2^2+\ldots+n^2)}{2}\right].$$

Dar ştim, că:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

astfel că putem scri:

$$S = 13^2\left[\frac{n^2(n+1)^2}{8} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\right],$$

$$\therefore\ S = \frac{13^2\, n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$$

Observare. Am fi putut înlocui numărul 13 prin orice număr a.

Soluţii date de d-nii: *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Raciu Raicef* (absolvent. lic. Silistra), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița). *Scarlat D-tru* (Şc. Navală, Constanţa), *Schuller David* (absolvent, Bacău), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu) şi *Zagaican Ilie* (conductor de lucrări publice, Bălţi).

Observare. D-l *Ionescu P. Haralamb.* atrage atentia că o problemă mai generală se găseşte în „Gazeta Matematică", vol XXXI. p. 432.

799. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 38 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 722. \end{cases}$$

CEZAR COSNITA.

A doua ecuaţie se poate scri:

$$(x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 38,$$

şi ţinând seamă de prima, deducem:

$$(1) \qquad xy + xz + yz = 31.$$

Ecuaţia 2-a a sistemului se poate scri:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) = 722,$$

sau:

$$38^2 - 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) = 722$$

$$\therefore\ x^2y^2 + x^2z^2 + x^2z^2 = 361.$$

Această ecuaţie se mai poate scri:

$$(xy + xz + yz)^2 - 2xyz(x+y+z) = 361.$$

Ţinând seamă de (1) şi de prima ecuaţie a sistemului, deducem de aci:

(2) $$xyz = \frac{31^2 - 261}{20} = 30.$$

Sistemul dat este echivalent deci cu sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ xy+xz+yz=31 \\ xyz=30. \end{cases}$$

Acest sistem însă este uşor de rezolvat, căci putem forma ecuaţia da gradul al 3-lea:

(3) $$t^3 - 10t^2 = 31t - 30 = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt x, y, z, ceiace uşor se motivează în baza relaţiilor cunoscute între rădăcinele şi coeficienţii unei ecuaţii.

Ecuatia (3) se verifică uşor pentru $t=2, 3, 5$, deci rădăcinele ei sunt:

$$x=2, \quad y=3, \quad z=5.$$

Din cauza simetriei în x, y, z a ecuaţiilor sistemului dat, avem următorul tablou de valori pentru x, y, z:

x	2	2	3	3	5	5
y	3	5	2	5	2	3
z	5	3	5	2	3	2

Soluţii date de d-nii: *Andrei Radu* (lic. Milit., Iaşi), *Chirilă Gheorghe* (lic. Milit., Iaşi), *Cuciureanu Ştefan* (lic. Milit, Iaşi), *Curehi Ioan*, *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Gavrilescu V.* (Braşov), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Grossu I. Aircea* (lic. Carol, Craiova), *Ioaniţescu D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu-Ţiu C. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Milea G. Ene* (lic. R.-Sărat), *Mihalcea Emil* (student), *Negrea A Mircea Leonte* (student. Bucureşti), *Petrnvici D-tru* (student), *Popescu D. Nicolae*, *Raciu Gh. Raiceff* (absolvent, Silistra), *Russu Liviu* (Şc. Polit., Timişoara), *Scarlat D.* (Şc. Navală), *Schuller David* (absolvent, Bacău), *Vâlceunu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* şi *Zagaican Ilie* (Conductor de lucrări publice, Bălţi).

801. *Să se stabilească relaţiunile:*

$$s^{8n} = \prod r_a^{2n} \operatorname{tg}^n \frac{A}{2}$$

$$r^{3n} = \prod r_a^n \operatorname{tg}^{2n} \frac{A}{2}$$

$$s^n \prod r_a^n \operatorname{tg}^n \frac{B}{2} \operatorname{tg}^n \frac{C}{2} = r^n \sum r_b^n r_c^n \operatorname{tg}^n \frac{A}{2} = 3 \prod r_a^n \operatorname{tg}^n \frac{A}{2}.$$

I. MURAROIU

In virtutea relaţiilor cunoscute:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r_a}{2}, \quad r_a r_b r_c = sp, \quad s = pr,$$

putem scri succesiv:

$$\prod r_a^{2n} \operatorname{tg}^n \frac{A}{2} = \prod r_a^{2n} \frac{r_a^n}{p^n} = \frac{r_a^{3n} r_b^{2n} r_c^{3n}}{p^{3n}} = \frac{s^{3n} p^{3n}}{p^{3n}} = s^{3n}.$$

Prima relaţie este stabilită:

Avem încă:

$$\prod r_a^n \operatorname{tg}^{2n} \frac{A}{2} = \prod r_a^n \frac{r_a^{2n}}{p^{2n}} = \frac{r_a^{3n} r_b^{3n} r_c^{3n}}{p^{3n}} = \frac{s^{3n} p^{3n}}{p^{6n}} = \left(\frac{s}{p}\right)^{3n} = r^{8a}.$$

Aceasta este a 2-a relaţie cerută:

Tot astfel:

$$s^n \sum r_a^n \operatorname{tg}^n \frac{B}{2} \operatorname{tg}^n \frac{A}{2} = s^n \sum r_a^n \frac{r_b^n}{p^n} \cdot \frac{r_c^n}{p^n} = \frac{3 s^n r_a^n r_b^n r_c^n}{p^{2n}} = \frac{3 s^n \cdot s^n p^n}{p^{2n}} = 3 s^n r^n$$

$$r^n \sum r_b^n r_c^n \operatorname{tg}^n \frac{A}{2} = r^n \sum r_b^n r_c^n \frac{r_a^n}{p^n} = \frac{3 r^n r_a^n r_b^n r_c^n}{p^n} = 3 r^n s^n$$

$$3 \prod r_a^n \operatorname{tg}^n \frac{A}{2} = 3 \prod r_a^n \frac{r_a^n}{p^n} = \frac{3 r_a^{2n} r_b^{2n} r_c^{2n}}{p^{3n}} = \frac{3 s^{2n} p^{2n}}{p^n} = 3 s^n \left(\frac{s}{p}\right)^n = 3 s^n r^n.$$

Ultimii membrii ai acestor trei egalităţi fiind aceiaşi urmează că primii lor membrii sunt egali, şi avem:

$$s^n \sum r_a^n \operatorname{tg}^n \frac{B}{2} \operatorname{tg}^n \frac{C}{3} = r^n \sum r_b^n r_c^n \operatorname{tg}^n \frac{A}{2} = 3 \prod r_a^n \operatorname{tg}^n \frac{A}{2}.$$

Şirul al 3-lea de egalităţi cerute este astfel stabilit.

Soluții date de d-nii: *Costăchescu V.* (Șc. Navală), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Gaarilescu V.* (Brașov), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Marineanu Traian* (student, București), *Mihalcea Emil* (student), *Negrea A. Mircea Leonte* (student. București), *Nichiforescu Gh.* (lic. Internat, Iași), *Petrovici D.* (student), *Raciu Gh. Raiceff* (absolvent, Silistra), *Scarlat D-tru* (Șc. Navală), *Vasiliu Gh. Cheorghe* (student, Leoben-Austria), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu), *Vonica C. Ion* și *Zagaican Ilie* (Conductor de lucrări publice, Bălți).

PROBLEME PROPUSE

818. — Se cere patratul perfect de șase cifre așa în cât ultimele trei cifre să fie identice, iar numărul format de ultimele trei cifre scrise după a doua cifră, să fie un patrat perfect.

NICOLAE PAVEL

819. — Se cere suma:

$$S = 101 + 2002 + 30003 + \ldots + n00\ldots n.$$

JUSTIN N. VALCEANU

821. — Se consideră triunghiul A B C înscris în cercul O. Să se arate că polul laturei B C în raport cu cercul O și proecțiile lui pe laturile triunghiului, sunt vârfurile unui paralelogram a cărui arie este dată de formula:

$$S_1 = \frac{8s^3}{(b^2+c^2-a^2)^2}.$$

CEZAR COSNITA

821. — Se dă un patrat A B C D de latură a, ale cărui diagonale se taie în O. Prelungim pe D A și C B respectiv până în E și F, astfel ca O A = A E și O B = B F. Cu raza O E se descrie un cerc care întâlnește pe O L în G, L fiind mijlocul lui A B. Diametrul cercului, paralel la F E, taie cercul în M și N. Dreptele M E și N F se taie în S. Se cere:

1°. Să se calculeze aria patrulaterului E F M N în funcție de latura a.

2°. Să se arate că punctul S se află pe prelungirea lui O G.

3°. Să se calculeze O S în funcție de latura a.

MARINEANU TRAIAN

822. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} ax^3 + by^3 = x \\ ay^2 + bx^3 = y. \end{cases}$$

COSTACHESCU V. C-TIN

823. — Să se determine polinomul de gradul cinci, $f(x)$ astfel ca, $f(x) + ax^2 + bx + c$, să fie divizibil prin $(x-\alpha)^4$, iar $f'(x) + dx + e$, să se dividă prin $(x-\beta)^2$. Care sunt condițiile ca problema să fie posibilă?

Să se considere apoi cazul particular $\alpha = 1$, $\beta = -1$ și să se determine $a, b, c, d,$ astfel ca să avem:

$$f(x) = A(x-\gamma)^5 + B(x-\gamma)^3 + C(x-\gamma).$$

Să se găsească în acest caz condiția ca ecuația $f(x) = 0$, să aibă toate rădăcinele reale.

T. POPOVICI

824. — Să se stabilească identitățile:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} + \frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{3\sin(2\alpha_1+\alpha)}{\sin 3\alpha_1},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}\left[\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{2\pi}{3}\right)}\right] + \frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha_1-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{3\sin(\alpha_1+2\alpha)}{\sin 3\alpha_1}.$$

V. ALACI

825. — Să stabilească relația:

$$\sum \frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{R+r}{R},$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

Notă. In problema 812 din numărul trecut, în locul egalității greșite A C = C D, se va ceti B C = C D.

INFORMAȚIUNI

Rezultatul la Concursul „R. M. T.“[1])

Cl. VII.

1. *Bădescu Amedeu* (lic. Caracal), 579, 624, 674, 682*, 687, 689, 697, 698, 720.
(19).

2. *Bratoșin Radu* (Brașov), 676*, 738, 741*, 747, 748 749.
(18).

3. *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzești, Craiova), 573, 579, 595, 596, 609, 580, 584, 593, 601, 602, 572, 585, 603, 604, 614, 618, 623, 624, 625, 626, 619, 620, 674, 677*, 678, 680*, 681, 682*, 683, 684, 685*, 686*, 687, 688*, 689, 692*, 693*, 694, 696*, 697, 698, 703*, 704, 706, 707*, 708*, 710, 712, 713*, 714*, 716, 717, 718, 719*, 720, 721, 722, 725*, 726, 727, 728*, 730, 732*, 733*, 734, 735, 736, 737*, 738, 739, 740, 741*, 742*, 744, 746, 748, 749, 750, 751*.
(205).

4. *Demetrescu August* (lic. Lazăr, București), 624, 676*, 677*, 684, 688*, 696*, 697, 704, 705.
(29).

5. *Dobromirescu August* (lic. Caracal), 595, 623, 633, 674, 676*, 678, 682*, 685*. 689, 693*, 697, 698, 704, 705, 707*, 713*, 714*, 716, 718, 720, 721, 727, 730, 732*, 733*, 734, 736, 738, 739, 744.
(84).

6. *Ettinger I. Alexandru* (lic. Matei-Basarab, București), 603, 618, 621. 623, 625, 626, 633, 630, 676*, 684, 689, 693*, 697, 700, 703*, 704, 706, 707*, 710, 714*, 717, 719*.
(54).

7. *Gheorghiu A. Alexandru* (lic. P.-Neamț), 614, 623, 624, 626, 632, 633, 620, 627, 630, 674, 675, 676*, 680*, 681, 684, 687, 688*, 689, 692*, 693*, 697, 698, 704, 705, 707*, 711*, 713*, 714*, 717, 719*, 720, 727, 728,
(87).

8. *Iancu David* (lic. Național, Iași), 595, 596, 580. 591, 602, 603, 604, 614, 618, 623, 624, 625, 626, 632, 633, 674, 676*, 677*, 680*, 681, 682*, 684, 685*, 687, 688*, 689, 694, 696*, 697, 698. 699*, 701*, 704, 705, 706, 707*, 708*, 711*, 713*, 714*, 715, 716, 718, 719*, 720, 721, 727.
(124).

9. *Ionescu-Țiu D. C-tin* (lic. Milit., Craiova), 623, 624, 626, 632, 633, 637, 627, 631, 674, 675, 676*, 677*, 678, 680*, 681. 683, 684, 685*, 687, 688*, 689, 691, 693*, 694, 696*, 699*, 704, 705, 706, 707*, 708*, 710, 711*, 713*, 714*, 716, 717, 718, 719*, 720, 721, 722, 725*, 727, 728*, 729*, 730, 731, 732*, 733*, 734, 735, 736, 737*, 738. 739, 740, 741*, 742*, 744, 746, 747, 749, 751*, 702*.
(194).

10 *Pavel H. Nicolae* (lic. Carol, Craiova), 614, 615, 618, 624, 626, 633, 674, 675, 676*, 680*, 681, 685*, 688*, 689, 693*, 698.
(41).

11. *Saur Ioan* (lic. Arad), 621, 626, 633, 674, 676*, 682*, 684, 687, 689, 692*, 696*, 697, 698, 701*, 704, 705, 706, 707*, 708*, 713*, 714*, 719*, 720, 725*, 727, 730, 740, 741*, 749, 751*.
(96).

1) Problemele rezolvate și numărul total de puncte obținute de fiecare concurent.

12. *Secăroiu D-tru* (lic. Brașov), 579, 618, 620, 674, 676*, 678, 682*, 683, 684, 685*, 687, 689, 692*, 693*, 694, 696, 697, 698, 701*, 704, 705, 707*, 708*, 710, 711*, 712, 713*, 714*, 716, 717, 718, 720, 721, 722, 726, 727, 730, 732*, 733*, 734, 735, 736, 737*, 738, 739, 741*, 742*, 744, 748, 749, 751*.
(153).

13. *Stan I. Aurelian* (lic. Milit., Iași), 574, 579, 595, 584, 591, 601, 602, 614, 618, 623, 624, 626, 633, 619, 627, 675, 676*, 677*, 678, 679, 680*, 681, 683, 684, 685*, 686*, 687, 688*, 689, 692*, 693*, 694. 696*, 700, 703*, 705, 706, 707*, 708*, 711*, 712, 713*, 714*, 716, 717, 718, 720, 721, 722, 724. 726, 727, 72 *, 730, 731. 732*, 733*, 734, 735, 736, 737*, 738, 740, 741*, 742*, 744, 745*, 746, 749, 751*, 702*.
(199).

14. *Vâlceanu N. Justin* (lic. Tg.-Jiu), 579, 595, 596, 587, 603, 618, 623, 624, 626, 633, 620, 674, 676*. 683, 684, 689, 693*, 696*, 697, 698, 704, 705, 706, 707*, 708*, 713*, 714*, 715, 716, 717, 718, 719*, 720, 721, 722, 724, 727, 732*, 733*, 735, 736, 737*, 738, 739, 740, 741*, 742*, 745*, 746, 747, 748, 749, 751*.
(140).

Recomandăm călduros corespondenților noștri, cartea *„Gândirea Matematică“* a d-lui profesor universitar *Petre Sergescu.*

——

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

——

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

——

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

——

Nu se pot lua în seamă pentru problemele de *Concurs,* de cât acelea sosite la timp și anunțate în revistă.

Problemele propuse de corespondenții înscriși la *Concurs,* se socotesc cu numărul de puncte corespunzător, ca oricărui rezolvitor înscris pentru *Concurs.*

Va urma rezultatul la cl. VIII.

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 IULIE 1929 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TRAIAN LALESCU.
2. CUM S'A INFIINTAT REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA.
3 I. CRĂCIUNESCU. O DEMONSTRATIE ELEMENTARA A TEOREMEI LUI D'ALEMBERT.
4. NOTE MATEMATICE, 13, 14.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 508, 533, 534, 763, 788, 802 804, 807, 808.
7. PROBLEME PROPUSE.
8 INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu** Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

ANUL IX — NO. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1929

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

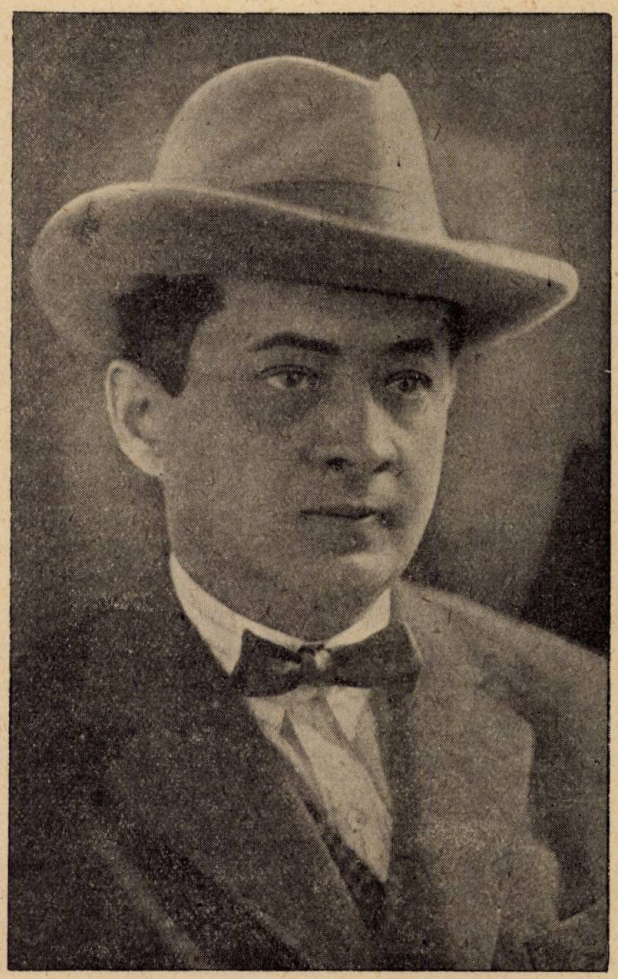
PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

Traian Lalescu

Cu inima strânsă de durere ne descoperim în fața rămășițelor pământești ale Profesorului *Traian Lalescu* aducându-i omagiul nostru de venerație și recunoștință. Venerație față de activitatea științifică prodigioasă care i-a impus numele în Analele științelor matematice, ducând faima sa și a geniului românesc în toată lumea civilizată. Venerație și recunoștință față de profesorul înțelept care putea să fie în același timp camarad și prieten, și prin aceasta animator pe tărâmul științelor, aprinzând flacăra dorinții de a cerceta adevărul, în sufletele tinere, cărora știa să le treacă nobila sa pasiune de muncă științifică.

Atâta ar fi de ajuns pentruca acest distins fiu al neamului să fie așezat în galeria oamenilor mari. Dar mintea sa în permanentă căutare de realizări, împinsă de nemărginita sa iubire de țară, l'a adus în atingere cu probleme politico-sociale în serviciul cărora și-a pus, mai ales în timpul din urmă, toată energia de care dispunea. Pe acest drum s'a întâlnit cu ideia înființării unei școale politechnice la Timișoara, a cărei latură națională a văzut-o din primul moment. Cu stăruința de care a dat dovadă în toate problemele mari cari l-au preocupat, profesorul *Lalescu*, pe atunci deputat, a reușit să înființeze Școala Politechnică îndreptându-i pașii primului an de existență în calitate de conducător al ei.



† Traian Lalescu

Aproape în același timp a dat drumul slovei tipărite care trebuia să poarte învățătura numerilor în toată țara Românească; din inițiativa sa și cu sacrificii personale a apărut *„Revista Matematică din Timișoara"*.

A fost o sforțare de erou legendar aceia de a face față tuturor lipsurilor din acea epocă. Sforțarea a fost însă încununată de succes mulțumită intuiției sale de om mare și minții sale luminate. Căci în cei 9 ani de existență atât Școala Politechnică din Timișoara cât și Revista s'au afirmat ca niște viabile organe sociale și naționale de primă utilitate.

Cuvântare ținută de D-l *V. Vâlcovici* cu ocazia înmormântării lui *Traian Lalescu*.

In astfel de sforțări nobile și-a cheltuit Lalescu minunata flacără a vieței sale.

Școala Politechnică din Timișoara împreună cu Revista Matematică, plecându-și drapelul cernit în fața sicriului primului rector și fondatorului, aduc prin aceasta un omagiu de recunoștință. Amintirea luptătorului care a dat viață din propria sa viață unei instituții de cultură, va fi eternă. Profesorii noului așezământ, aproape toți foști elevi ai marelui defunct, deplâng pierderea și a unui învățător și a unui prieten sfătuitor, care știa să topească într'un val de caldă camaraderie orice uscăciune sau amărăciune s'ar fi putut ivi.

Odihnească în pace sufletul aceluia care pe pământ a fost neodihnit dar neobosit pentru binele neamului.

CUM S'A INFIINȚAT

REVISTA MATEMATICĂ DIN TIMIȘOARA

In toamna anului 1920 s'au deschis porțile Școalei Politechnice din Timișoara, prin examenul de admitere în școală, ținut sub președenția lui *Traian Lalescu,* primul director al școlii.

Examenul a dat măsura pregătirii candidaților recrutați în mare majoritate din liceele de peste munți și având să lupte cu greutăți în privința pregătirii matematice, ce se făcea cu mult mai bine în liceele noastre reale.

Traian Lalescu a gândit atunci la înființarea unei reviste elementare, care să pregătească pe candidații la studiile științifice, insuflându-le dragostea de matematică. Și și-a adus gândul la îndeplinire tipărind primul număr, care poartă data de 15 Martie 1921.

Titlul ales este reprezentativ. Noua revistă matematică era din *Timișoara*, și în gândul fondatorului ea trebue să poarte în toate colțurile țării numele orașului, care făcea sforțări pentru românizarea lui, care, imediat după unire a făcut sacrificii pentru primirea școlii politechnice, și care ambiționă să fie metropola efectivă a *Banatului.* Acest titlu este relevat și prin culoarea roșie și este păstrat cu stăruință ca semnul distinctiv al copertei noastre.

Primul număr apărut este prin forma, dispoziția textului, aranjarea subiectelor și a rubricelor, în întregime datorit gândului și condeiului lui *Traian Lalescu.* El a scris cuvântul introductiv și primul articol ce trata despre rezolvarea inegalităților algebrice. Pentru al doilea articol a solicitat pe d-l *I. Ionescu,* unul dintre fondatorii *„Gazetei Matematice“*, care tratează despre parabolă. Probleme rezolvate s'au dat patru exemple, luate din *„Gazeta Matematică“*, printre cele mai reprezentative. Prima problemă de aritmetică este un exemplu de răbdare și conștiinționzitate, celelalte de geometrie, trigonometrie și algebră, toate au fost propuse de cei patru stâlpi ai *Gazetei Matematice.* Note matematice, chestiuni de examen, probleme propuse, informațiuni au apărut în aceeași ordine.

O rubrică „Probleme din vechime“, a dispărut apoi. In primul număr a apărut epitaful lui *Diofante,* traducere versificată, în care se găsește cuvântul bănățean *socoată* în senzul de socoteală, calcul.

Primul număr a fost tipărit la *Göbl*, în București, în 600 exemplare, și distribuit dela Timișoara noilor abonați. Prețul abonamentului fusese fixat la 20 lei pe an.

Este poate interesant de adăugat, mai cu seamă în lipsa de idealism ce domnește astăzi, că *Traian Lalescu* a suportat personal cheltuiala aceasta și că în registrele revistei se începe cu plata celui de al doilea număr.

Dar revista trebuia tipărită la Timișoara. Pe atunci, coincidență fericită „Cartea Românească“, căuta să facă o sucursală la Timișoara unde instalase o tipografie veche, cumpărată dela un ziar din Arad. Primul client a fost *Revista Matematică.* Greutățile erau mari, tipărirea necesitând literă specială. Dar acestea au fost învinse, revista putând să-și respecte formatul și aranjarea materialului, care acuma au devenit tradiționale.

Pentru chestiunile de geometrie era nevoie de figuri. In Timișoara nu exista atelier de zincografie. Figurile din numărul 3 au fost făcute la București, pentru numărul 4 s'au tras la piatră, la un litograf, deci un tiraj suplimentar, iar pe urmă

am descoperit în Timişoara un xilograf, lucrător care săpa figurile în lemn.

Numărul abonaţilor în primul au a fost de 832, fapt ce a dovedit cu prisos necesitatea revistei. Primul număr a trebuit retipărit pentru a complecta colecţia, iar volumul I este acum complect epuizat. Nici măcar în colecţia noastră nu mai posedăm acest prim număr tipărit la *Göbl*, căci colecţiile au fost complectate cu numărul retipărit.

Traian Lalescu s'a ocupat în primul an deaproape cu conducerea revistei. Retrăgându-se la Bucureşti, a continuat să trimită articole, note şi probleme, până în timpul din urmă, când a fost absorbit de diferite alte preocupări.

Revista pe care a întemeiat'o cu atâta suflet s'a desvoltat şi continuă mai departe gândul său.

O DEMONSTRAŢIE ELEMENTARA A TEOREMEI LUI D'ALEMBERT

de I. CRACIUNESCU

Orice ecuaţie cu coeficienţi reali sau imaginari de gradul n, are n rădăcini.

E destul să demonstrăm că ecuaţia $f(z)=0$ de gradul n are o rădăcină z_0, căci împărţind $f(z)$ cu $z-z_0$, obţinem câtul $f_1(z)$ de gradul $n-1$, care de asemenea are o rădăcină z_1, ş. a. m. d.

Să presupunem că ecuaţia $f(z)=0$ cu coeficienţi reali sau imaginari, n'are nici o rădăcină reală sau imaginară. Punem $z=x+iy$, înlocuim în ecuaţia dată, facem desvoltările şi separând partea reală de partea imaginară, obţinem:

$$f(z)=P(x,\ y)+iQ(x,\ y),$$

în care coeficienţii lui P şi Q sunt reali.

Fiindcă am presupus că nu există o valoare reală sau imaginară pentru z astfel ca $f(z)=0$, adică $P(x,\ y)=0$ şi $Q(x,\ y)=0$, rezultă că nu există valori reale pentru x şi y astfel ca modulul $|f(z)|=\sqrt{P^2+Q^2}$ să fie egal cu zero. Acest modul, care este o funcţie de x şi y, fiind pozitiv şi neputând fi egal cu zero, rezultă că are un minim. Să presupunem că modulul este minim pentru $x=x_0$ şi $y=y_0$, adică pentru $z=z_0=x_0+iy_0$.

Să arătăm că acest minim nu poate fi decât zero şi atunci $z=z_0$ este o rădăcină a ecuaţiei $f(z)=0$.

Să facem transformata lui $f(z)$ punând $z=z'+z_0$ şi avem:

$$f(z)=f(z'+z_0)=$$
$$P(x'+x_0,\ y'+y_0)+iQ(x'+x_0,\ y'+y_0)$$
$$|f(z)|=|f(z'+z_0)|=$$
$$\sqrt{P^2(x'+x_0,\ y'+y_0)+Q^2(x'+x_0,\ y'+y_0)}.$$

Minimul modulului $|f(z)|$ fiind pentru $z=z_0$, rezultă că minimul modulului $|f(z'+z_0)|$ va fi pentru $z'=0$, adică pentru $x'=0$ şi $y'=0$ şi acest minim este egal cu:

$$|f(z_0)|=\sqrt{P^2(x_0,\ y_0)+Q^2(x_0,\ y_0)}.$$

Să studiem variaţia modulului funcţiei:

$$f(z'+z_0)=f(z_0)+$$
$$\frac{z'}{1}f'(z_0)+\frac{z'^2}{1.2}f''(z_0)+\ldots+\frac{z'^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}(z_0)+\ldots$$

în vecinătatea lui $z'=0$.

Să presupunem că din derivatele succesive $f'(z)$, $f''(z_0),\ldots$, prima care nu este egală cu zero este $f^{(m)}(z_0)$, adică $f'(z_0)=0$, $f''(z_0)=0,\ldots f^{(m-1)}(z_0)=0$ şi $f^{(m)}(z_0)\neq 0$, se'nţelege că $m\leq n$ şi poate fi egal şi cu 1. Atunci funcţia dezvoltată devine:

$$f(z'+z_0)=f(z_0)+\frac{z'^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}(z_0)+\ldots$$

Să dăm lui z' valori foarte apropiate de zero. Atunci pentru studiul variaţiei modulului funcţiei $f(z'+z_0)$ în vecinătatea lui $z'=0$, putem neglija puterile lui z' superioare lui m, care sunt în număr limitat, şi rămâne de studiat variaţia modulului:

$$\left|f(z_0)+\frac{z_1^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}(z_0)\right|$$

în vecinătatea lui $z'=0$.

Punem:

$$f(z_0)=r_0(\cos\alpha_0+i\sin\alpha_0),$$
$$\frac{f^{(m)}(z_0)}{1.2\ldots m}=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),\quad z'=\varepsilon(\cos x+i\sin x),$$

în care ε este foarte mic. Avem:

$$f(z_0)+\frac{z'^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}(z_0)=r_0(\cos\alpha_0+i\sin\alpha_0)+$$
$$r\varepsilon^m[\cos(\alpha+mx)+i\sin(\alpha+mx)]$$

$$\left| f(z_0)+\frac{z_1^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}(z_0)\right| = \sqrt{[r_0\cos\alpha_0 + r\,.\,\varepsilon^m\cos(\alpha+mx)]^2+[r_0\sin\alpha_0+r\,.\,\varepsilon^m\sin(\alpha+mx)]^2} =$$

$$\sqrt{r_0^2+2r_0\,.\,r\,.\,\varepsilon^m\cos(\alpha+mx-\alpha_0)+r^2\,.\,\varepsilon^{2m}}.$$

Putem neglija şi termenul în ε^{2m} de sub radical, fiind foarte mic şi sub radical rămâne;

$$r_0^2+2r_0\,.\,r\,.\,\varepsilon^m\cos(\alpha+mx-\alpha_0),$$

în care r_0, r şi ε sunt cantităţi pozitive diferite de zero. Se vede uşor că expresia de mai sus nu poate să aibă minimul $r_0^2=|f(z_0)|^2$, fiindcă dând argumentului x o valoare x' astfel ca $\alpha+mx-\alpha_0$ să fie cuprins între $\frac{\pi}{2}$ şi π, avem:

$$r_0 r\,\varepsilon^m\cos(\alpha+mx'-\alpha_0),$$

negativ, adică:

$$r_0^2+2r_0\,r\varepsilon^m\cos(\alpha+mx'-\alpha_0)<r_0^2,$$

şi deci expresia de mai sus nu poate să fie minimă decât când $r_0=0$, adică $|f(z_0)|=0$ şi z_0 este o rădăcină a ecuaţiei $f(z)=0$.

NOTE MATEMATICE

13. *Asupra problemei 85.*

In general polinomul:

$$(x+1)^{2^m n}+(x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}+\ldots+(x+1),$$

este divizibil prin:

$$x^{n-1}+C_n^1 x^{n-2}+C_n^2 x^{n-3}+\ldots+C_n^{n-3}x+C_n^{n-2}.$$

Intr'adevăr notând cu P polinomul şi cu E împărţitorul se observă că:

$$E=(x+1)^{n-1}+(x+1)^{n-2}+$$
$$(x+1)^{n-3}+\ldots+(x+1)+1,$$

atunci:

$$P=E+(x+1)^{2^m n}-1.$$

Insă:

$$(x+1)^{2^m n}-1=[(x+1)^{2^{m-1}n}+1][(x+1)^{2^{m-2}n}+1]$$
$$\ldots[(x+1)^n+1][(x+1)^n-1],$$

şi se observă că:

$$(x+1)^n-1=xE,$$

deci P este divizibil cu E câtul fiind:

$$1+x[(x+1)^{2^{m-1}n}+1][(x+1)^{2^{m-2}n}+1]\ldots$$
$$\ldots[(x+1)^n+1].$$

Făcând $m=2$, $n=3$, suntem în cazul problemei 85.

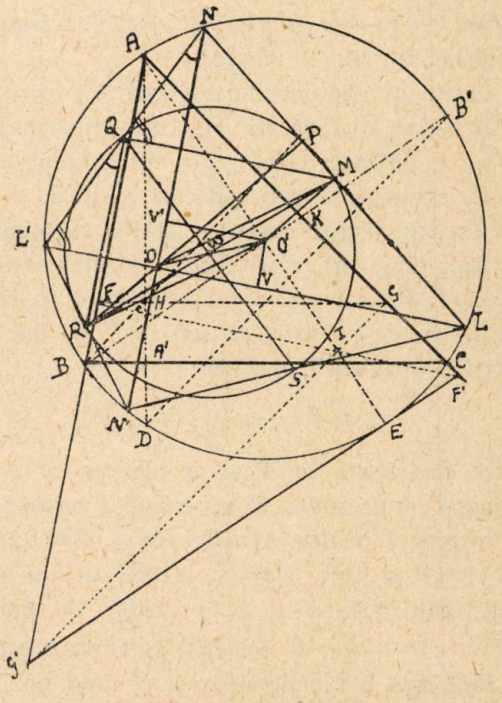
T. Popovici

14. *Soluţia geometrică a problemei 725.*

Repet enunţul problemei puţin schimbat:

Se dă triunghiul A B C *în care* $\overline{AA'}=\overline{A'C}$, A' *fiind piciorul înălţimei din* A *pe* $\overline{BC}$.

1. *Fie* D *şi* E *punctele unde înălţimea şi diametrul din vârful* A *taie respectiv pentru a doua oară cercul* O' *circumscris triunghiului* A B C. *Se ia pe cerc simetricul* B' *al lui* B *faţă de centrul*



cercului. Să se arate că perpendiculara din B′ *pe* C A *trece prin* D.

2. *Prin ortocentrul* H *al triunghiului, se duce paralela* F G *la latura* B C. *In* F *ridicăm o perpendiculară pe* A B *care taie pe* A C *în* F′, *iar în* G *ridicăm o perpendiculară pe* A C *care taie pe* A B *în* G′. *Să se arate că* $\overline{F'G'}$ *este tangentă la cerc în punctul* E.

3. *Printr'un punct oarecare* O *din interiorul cercului* O′ *se duc două coarde* O L *şi* O N *perpendiculare între ele. Să se afle locul mijlocului coardei* L N.

4. *Să se afle locul proecţiei punctului* O *pe* L N.

1. Triunghiul A A′ C fiind isoscel avem:

$$\sphericalangle A'AC = \sphericalangle A'CA.$$

De unde:

$$\text{arc } BA = \text{arc } DC \tag{1}$$

$$\sphericalangle BA'A = \frac{1}{2}(\text{arc } BA + \text{arc } DC) = 90^0$$

$$\text{arc } BA + \text{arc } DC = 180^0,$$

şi ţinând seamă de (1):

$$\text{arc } BA = 90^0.$$

Deci $\overline{AO}$ este perpendiculară pe B B′:

$$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2}(\text{arc } AB' + \text{arc } B'C)$$

$$\sphericalangle B'KC = \frac{1}{2}(\text{arc } BA + \text{arc } B'C)$$

K fiind punctul de întâlnire al dreptelor B B′ şi B C. Şi cum:

$$\text{arc } AB' = \text{arc } BA = 90^0.$$

rezultă că:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle B'KC.$$

De aci se vede uşor că:

$$\sphericalangle BAA' = \sphericalangle BB'D.$$

Dar aceste unghiuri au vârfurile pe cerc şi două din laturile lor se întâlnesc tot pe cerc, ele fiind egale trebuie ca şi celelalte laturi să se întâlnească pe cerc. Perpendiculara din B′ pe A C trece deci prin D.

2. Fie I punctul de întâlnire al dreptelor F F′ şi G G′. Patrulaterul F A G I este inscriptibil având:

$$\sphericalangle AFI = \sphericalangle AGI = 90^0.$$

Insă:

$$\sphericalangle GFF' = 90 - \hat{B} = 90 - \frac{\text{arc } BC}{2} =$$

$$\frac{180 - \text{arc } AC}{2} = \frac{1}{2} \text{ arc } EC.$$

Dar şi:

$$\sphericalangle EAC = \frac{1}{2} \text{arc } EC.$$

Deci:

$$\sphericalangle GFF' = \sphericalangle EAC.$$

De unde rezultă că A E este diagonală în patrulaterul F A G I şi trece prin punctul I.

Cum I este ortocentrul triunghiului A F′ G′, $\overline{AE}$ este perpendiculară pe F′ G′.

Fie E′ punctul unde A E taie pe F′ G′. Triunghiul H A G este isoscel şi perpendiculara din H pe A C cade în mijlocul dreptei A G. Prin urmare înălţimea B H cade în mijlocul lui $\overline{AG}$. Considerăm triunghiul A G G′, în care B H şi G G′ sunt paralele, se deduce uşor că B este la mijlocul segmentului $\overline{AG'}$. In triunghiul A G′ E′, $\overline{BO'}$ fiind perpendiculară pe $\overline{AO'}$ şi deci paralelă cu G′ E′, trece prin mijlocul laturii A′ E′. De unde O′ E′ = O′ E = R (R = raza cercului O′). Punctul E′ se confundă cu E şi cum A E este perpendiculară pe $\overline{F'G'}$ urmează că $\overline{F'G'}$ este tangenta în E la cercul O′.

3. S'a menţionat în R. M. T., pag. 185, vol. VIII, unde a fost rezolvată problema 725, că în *Gazeta Matematică*, vol. XXXI, pag. 328, se demonstrează următoarea proprietate:

Intr'un patrulater ortodiagonal mijloacele laturilor şi proecţiunile pe aceste laturi ale punctului de întâlnire al diagonalelor sunt opt puncte situate pe un acelaşi cerc.

Nu am cunoştiinţă de această demonstraţie, dar iată demonstraţia pe care o dau în cazul când patrulaterul ortodiagonal este inscriptibil, dând în acelaşi timp soluţiile punctelor 3 şi 4 ale problemei de mai sus.

Considerăm patrulaterul ortodiagonal $L N L' N'$ unde M, Q, R, S sunt mijloacele laturilor, şi O' punctul de întâlnire al diagonalelor.

Dreapta $\overline{RO}$ întâlneşte pe $N'L$ în P. Triunghiul $L'RO$ este isoscel, lucru ce se deduce din triunghiul dreptunghic $L'ON'$. De aci:

$$\sphericalangle LOP = \sphericalangle ROL' = RL'O$$

şi cum:

$$\sphericalangle OLP = \sphericalangle L'N'O = 90^0 - \sphericalangle RL'O,$$

urmează că:

$$\sphericalangle LPO = 90^0.$$

Deci dreapta $\overline{RO}$ este paralelă cu $\overline{O'M}$.

Analog se arată că $\overline{OM}$ este paralelă cu $\overline{R'O}$.

Patrulaterul $ROMO'$ este un paralelogram, de unde:

$$\overline{O\omega} = \overline{\omega O'} \text{ şi } \overline{R\omega} = \overline{\omega M}$$

(ω fiind punctul de întâlnire al dreptelor $\overline{RM}$ şi $\overline{OQ'}$. Dreapta RM trece prin mijlocul ω al dreptei $\overline{OO'}$. La fel se arată că $\overline{OS}$ trece prin ω şi că:

$$\overline{Q\omega} = \overline{\omega S}.$$

Triunghiul RQM este dreptunghic căci:

$$\sphericalangle L'QR = \sphericalangle L'NN'$$

$$\sphericalangle MQN = \sphericalangle LL'N = 90 - \sphericalangle L'NN'.$$

Deci:

$$\sphericalangle RQM = 90^0.$$

De aci:

$$\overline{R\omega} = \overline{\omega M} = \overline{Q\omega} = \overline{S\omega}.$$

Punctele R, M, Q, S se află pe un acelaş cerc cu centrul în ω. Fie r raza acestui cerc. Avem:

$$(2r)^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QR}^2.$$

Dar:

$$\overline{MQ}^2 + \overline{QR}^2 = \left(\frac{LL'}{2}\right)^2 + \left(\frac{NN'}{2}\right)^2 = \overline{LV}^2 + \overline{NV'}^2$$

V şi V' fiind proecţiunile punctului O' pe $\overline{LL'}$ şi $\overline{NN'}$.

Din triunghiurile VLO' şi $V'NO'$ scoatem:

$$\overline{LV}^2 + \overline{VO'}^2 = R^2$$

$$\overline{NV'}^2 + \overline{V'O'}^2 = R^2.$$

Adunând aceste două relaţii şi ţinând seamă de relaţia:

$$\overline{VO'}^2 + \overline{V'O'}^2 = \overline{OO'}^2.$$

Avem:

$$(2)\quad \overline{LV}^2 + \overline{NV'}^2 = \overline{RQ}^2 + \overline{QM}^2 = 2R^2 - \overline{OO'}^2.$$

De unde:

$$4r^2 = 2R^2 - \overline{OO'}^2$$

$$\overline{\omega M} = r = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - \overline{OO'}^2} = \text{constant}.$$

Prin urmare locul punctului M, mijlocul coardei LN este cercul ω.

4. Am văzut RO este perpendiculară pe NL. Deci P, proecţiunea punctului O pe LN se află pe RO şi din triunghiul dreptunghic RPM a cărui ipotenuză e diametru în cercul ω deducem că şi P se află pe acest cerc. Locul punctului P este tot cercul ω.

Din relaţia (2) rezultă următoarea proprietate.

Dacă printr'un punct fix din interiorul unui cerc se duc două coarde perpendiculare suma patratelor acestor coarde este constantă.

JUSTIN N. VALCEANU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, No. 10, Iunie 1929. Metodologia matematicilor (urmare şi sfârşit) de, † *N. C. Segârceanu*. Asupra problemei No. 3567, de *Col. Gh. Buicliu*. O proprietate generală a curbelor plane cu aplicaţiuni asupra conicelor şi teoremei lui *Fregier*, de *M. Nicolau*.

2. *O. Onicescu. Calcul vectorial.* Cuprinde: Operaţii vectoriale cu caracter finit. Calculul vectorial infinitizemal. Expunerea este clară şi îngrijită, este prima lucrare în româneşte de acest gen. Este prima parte dintr'o lucrare mai dezoltată, pe care ne-o promite distinsul profesor universitar.

3. *Şerban A. Gheorghiu. Sur l'Ecuation de Fredholm.* Thèse, soutenues le 17 décembre 1928, à Paris.

4. *Grigore C. Moisil. La mécanique analytique des systèmes continus.* Thèse soutenues le 4 Juin 1929, à Bucarest.

5. *Buletinul „Asociaţiei Matematice a liceului C. Alimăniştеanu, din Oltenita.*

Din iniţiativa d.lui profesor *Tr. A. Dordea*, elevii cursului superior dela liceul din *Oltenita* s'au grupat într'o socie-

tate, la 11 Octombrie 1928. In şedinţe săptămânale s'au tratat de elevi şi profesori, diferite subiecte şi s'a creat astfel acea atmosferă înălţătoare şi prielnică unei bune îndrumări matematice. O confirmare a acestei frumoase activităţi este şi numărul mare de corespondenţi ce'l avem noi „R. M. T." printre elevii liceului din *Oltenita*. Menţionăm în special bogata şi fecunda activitate. a distinsului preşedinte a *Asociaţiei Matematice*, d-l *Haralamb Ionescu* din cl. VII, care ne trimete numeroase soluţii, probleme propuse, note şi chiar articole pentru „R. M. T." In aceste timpuri de secetă matematică, când din cauza unui program scăzut nu se mai cultivă în ogoarele matematice a liceelor din ţară, capitolele: limită, continuitate, derivate, studiul funcţiilor, teoria combinărilor, determinanţi, serii, etc., care altă dată dădeau frumoase şi bogate roade, este o încercare curajoasă şi de toată lauda strângerea rândurilor elevilor din cursul superior, aşa cum s'a făcut la liceul din Oltenita.

PROBLEME REZOLVATE

508*. — *Patru persoane* A, B, C *şi* D, *işi împart un sac cu nuci, în felul următor: Prima persoană* A *aruncă o nucă pentru a-şi putea lua a patra parte, un număr întreg de nuci; a doua* B *procedează la fel cu restul din sac, apoi a treia* C *cu ceeace rămâne după* B *şi în fine a patra* D *cu ceeace rămâne după* C. *Restul de nuci se împarte exact în patru părţi egale, celor 4 persoane. Câte nuci au fost în sac?*

V. VALCOVICI

Fie x numărul nucilor din sac; y, z, t, u, câte au luat fiecare din cele patru persoane după ce au aruncat câte o nucă şi au luat un sfert din cele rămase în sac; $4v$ restul.

Conform enunţului trebue să avem:

$$\begin{cases} x-1=4y \\ 3y-1=4z \\ 3z-1=4t \\ 3t-1=4u \\ 3u=4v. \end{cases}$$

Problema revine la rezolvarea în numere întregi a acestui sistem.

Din ultima ecuaţie deducem:

$$u=\frac{4v}{3},$$

v trebuie să fie de forma:

$$v=3a_1 \qquad (a_1 \text{ intreg}),$$

atunci:

$$u=4a_1.$$

Inlocuind această valoare în ecuaţia 4-a a sistemului, deducem:

$$t=\frac{16a_1+1}{3}.$$

Pentru ca t să fie întreg, trebue ca:

$$a_1=3a_2-1, \qquad (a_2, \text{ întreg})$$

şi atunci:

$$t=16a_2-5.$$

Această valoare o introducem în ecuaţia 3-a a sistemului, deducem:

$$z=\frac{64a_2-19}{3}.$$

Putem lua şi aci:

$$a_2=3a_3+1, \qquad (a_3, \text{ întreg})$$

rezultă:

$$z=64a_3+15.$$

Această valoare înlocuită în a 2-a ecuaţie a sistemului, ne dă:

$$y=\frac{256a_3+61}{3}.$$

Pentru y întreg, trebue ca:

$$a_3=3a_4-1, \qquad (a_4, \text{ întreg}),$$

atunci:

$$y=256a_4-65.$$

Această valoare înlocuită în prima ecuaţie a sistemului, ne dă:

$$x=1024a_4-259.$$

Dând lui a_4 valorile 1, 2, 3, 4, ... n, ... avem o infinitate de soluţii.

Numărul de nuci in condiţiile problemei poate fi deci:

765, 1789, 2813, ...

(o progresie aritmetică cu raţia 1024).

Soluţii date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, Bucuresti), *Albeaţă N. Ermil* (lic. P.-Neamţ), *Ardelea Radu* (lic. Milit., Craiova), *Bey M. Gheorghe* (lic. Buzeşti, Craiova), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter I, Otto* (lic. National, Iaşi), *Cernes A. M.* (Iaşi), *Constantinescu Gh. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (lic. Buzeşti, Craiova), *Dârmănescu I.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Feldştein M. Solomon* (lic. Piteşti), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Grozăvescu D-tru* (lic. Buzeşti, Craiova), *Iancu H. David* (lic. Naţional, Iaşi), *Ionescu Bujor Andrei* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iscovici Paul* (Piteşti), *Lupescu V. Eugen* (lic. Plteşti), *Manolescu I. N.* (Focşani), *Nestor G. D-t:u* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolau I. Dobridor* (lic. Milit., Craiova), *Niculescu Şt. Emanuel* (lic. Milit., Craiova). *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti). *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Sobel Mircea* (lic. Buzeşti, Craiova), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe, Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Winckler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi),

533. — *Numărul* N *împărţit cu altul dă câtul* a *şi restul* b. *Dacă pe* N *îl împărţim cu alt număr, dă câtul* b *şi restul* a. *Să se arate că există două numere* α *şi* β *prime între ele, aşa că* N *împărţit cu produsul lor să dea un rest divizibil cu suma lor.*

EMIL ŞTEFANESCU

Avem:

$$N = a\,p + b = b\,q + a,$$

deci:

$$(1) \qquad a\,(p-1) = b\,(q-1).$$

Fie d c. m. m. c. d. dintre a şi b, avem:

$$a = d\,\alpha, \quad b = d\,\beta,$$

α prim cu β.

Inlocuind în (1), găsim:

$$\alpha\,(p-1) = \beta\,(q-1).$$

Cum β prim cu α, rezultă:

$$p - 1 = t\,\beta, \text{ deci, } q - 1 = t\,\alpha.$$

Atunci:

$$N = d\,\alpha\,(t\,\beta + 1) + d\,\beta = d\,t\,\alpha\,\beta + d\,\alpha + d\,\beta,$$

sau:

$$N = d\,t\,.\,\alpha\,\beta + d\,(\alpha + \beta).$$

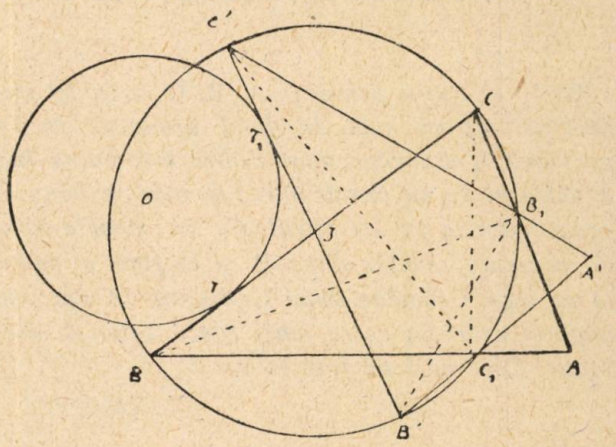
De aci, reese proprietatea numerelor N.

Se vede că există cele două numere α şi β prime între ele, divizori respectiv a numerelor a şi b.

Soluţii date de d-nii: *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov) şi *Diaconescu V. Traian* (lic. Caracal).

534. — *Să se construirscă un triunghiu* A B C, *cunoscând lungimea laturei* B C, *picioarele* B_1 *şi* C_1 *ale înălţimelor duse din* B *şi* C *şi ştiind că* B C *este tangenta unui cerc dat.*

V. ALACI



Presupun problema rezolvată, fie A B C triunghiul cerut. Observăm că cercul J cu centrul în mijlocul lui B C şi $\frac{BC}{2}$ ca rază, trece şi prin punctele B_1 şi C_1, căci unghiurile CB_1B, CC_1B sunt drepte. Cum B_1, C_1 sunt date, asemenea şi mărimea lui B C, rezultă următoarea construcţie:

Din B_1 sau C_1 intersectăm cu un arc de cerc de rază $\frac{BC}{2}$ perpendiculara dusă la mijlocul lui B_1C_1. Obţinem astfel punctul J. Din J ducem o tangentă la cercul O anume B C şi prelungim pe BC_1 şi CB_1 până se întâlnesc în A. Triunghiul cerut este A B C.

Discuţie. Cercul descris din B_1 cu $\frac{BC}{2}$ ca rază, taie perpendiculara dusă în mijlocul lui B_1C_1 în J şi J_1 de cealaltă parte a lui B_1C_1. Apoi observăm că din J şi J_1 se pot duce în general câte 2 tangente cercului O. aşa că dacă J şi J_1 sunt exterioare cercului O, putem avea 4 soluţii distincte, iar dacă am inversa notaţia tangentelor BC, punând CB, putem avea chiar 8 soluţii distincte.

Dacă J şi J_1 ar fi în interiorul cercului O, n'avem nici o soluţie. Dacă J şi J_1 ar fi pe cercul O, e uşor de văzut că am avea numai 4 soluţii.

Dacă J ar fi pe cercul O şi J_1 exterior, sau invers, am avea 6 soluţii.

Dacă J ar fi interior şi J_1 exterior cercului O sau invers, am avea 4 soluţii.

Dacă J ar ar fi interior şi J_1 pe cercul O sau invers, am avea 2 soluţii.

In figură sunt construite numai două triunghiuri, ABC şi A'B'C'.

Soluţii date de d-nii: *Atanasiu C-tin* (Bolgrad), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Câlniceanu Gheorghe* (lic. Timişoara), *Costăchescu V. C-tin* (lic. Milit. Iaşi), *Dimitriu Gh. Ştefan* (lic. Milit., Iaşi), *Dinu S. D-tru* (Şc. de Conductori, Chişinău), *Dumitrescu Eugen* (lic. Buzău), *Fericeanu Ştefan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Gheorghiu Traian* (Şc. Politechnică), *Manolescu Nicolae* (Şc. Politechnică), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Pascu Sebastian* (lic. Cluj), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat) *Sassu V. Ioan* (lic. Tg.-Mureş), *Scripcă Mihai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Winkler Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi), *Zagaican Ilie* (Şc. de Conductori, Chişinău) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

763. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(a-1)\left[x^m+(1+C_m^1 a)x^{m-1}+\ldots\right.$$
$$\ldots+(1+C_2^1 a+C_3^2 a^2+\ldots+C_{m-1}^{m-2}a^{m-2}+$$
$$\left.C_m^{m-1}a^{m-1})x\right]+a^{m+1}-1=0.$$

ION Z. PANTU

Impărţind cu $a-1$, avem:

$$x^m+(1+C_m^1 a)x^{m-1}+\ldots+(1+C_2^1 a+C_3^2 a^2+\ldots$$
$$\ldots+C_{m-1}^{m-2}a^{m-2}+C_m^{m-1}a^{m-1})x+$$
$$a^m+a^{m-1}+a^{m-2}+\ldots+1=0.$$

Desfăcând parantezele şi grupând, putem scri:

$$x^m+C_m^1 a x^{m-1}+C_m^2 a^2 x^{m-2}+\ldots+C_m^{m-1}a^{m-1}x$$
$$+a^m+x^{m-1}+C_{m-1}^1 a x^{m-2}+C_{m-2}^2 a^2 x^{m-3}+$$
$$\ldots+a^{m-1}+\ldots+x^2+C_2^1 a x+a^2+x+a+1=0,$$

sau:

$$(x+a)^m+(x+a)^{m-1}+\ldots+(x+a)+1=0.$$

Insumând termenii acestei progresii geometrice, avem:

$$\frac{(x+a)^{m+1}-1}{x+a-1}=0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţii sunt acelea a numărătorului, cu excepţia celor ce ar anula şi numitorul.

Rădăcinele numărătorului sunt, însă:

$$x=\cos\frac{2k\pi}{m+1}+i\sin\frac{2k\pi}{m+1}-a,\ (k=0,1,2,\ldots m)$$

Rădăcina corespunzătoare lui $k=0$, o eliminăm însă pentrucă anulează şi numitorul,

Rădăcinele ecuaţiei date sunt deci:

$$x=\cos\frac{2k\pi}{m+1}+i\sin\frac{2k\pi}{m+1}-a,\ (k=0,1,2\ldots m).$$

Soluţie dată de d-nii: *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti).

788, — *Se scrie patratul unui număr m de o cifră, apoi două cifre a şi b şi în fine,* $(m+10)^2$. *Se obţine astfel un patrat perfect. Se cere acest patrat, ştiind că:*

$$a\times b=m^2-1.$$

NIC. PAVEL ORIZABA.

Pentru m nu putem lua, de cât:

$$m=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8.$$

Pentru $m=2$, avem:

$$a.b=3.$$

deci, $a=1$, $b=3$ sau $a=3$, $b=1$.

Analog procedăm pentru celelalte cazuri.

Valorile lui m, a, b, $(m+10)^2$ sunt cuprinse în următorul tablou:

m	a	b	$(m+10)^2$	m	a	b	$(m+10)^2$
2	1	3	144	5	6	4	225
2	3	1	144	5	3	8	225
3	2	4	169	5	8	3	225
3	4	2	169	6	5	7	256
3	1	8	169	6	7	5	266
3	8	1	169	7	6	8	289
4	3	5	196	7	8	6	289
4	5	3	196	8	7	9	324
5	4	6	225	8	9	7	324

Din acest tablou rezultă că numărul:

$$m^2\,a\,b\,(m+10)^2,$$

ar putea fi:

413144, 431144, 924169, 942169, 918169, 981169, 1635196, 1653196, 2546225, 2564225, 2538225, 2583225, 3657256, 3675256, 4968289, 4986289, 6479324, 6497324.

Dintre acestea numai 4986289 este patrat perfect:

$$4986289 = 2233^2,$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-nii: *Brotmann I.* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Măcănescu Cr. Ioan* (lic. Târgovişte), *Mihalcea Emil* (student), *Petrovici D.* (student), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Raciu Gh. Raiceff* (Turtucaia), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu) şi *Zagaican Ilie* (Conductor de lucrări publice, Bălţi).

A mai trimes soluţii, d-nul: *Marineanu Traian* (student, Bucureşti).

802. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel ca numărul format de cifra a doua urmată de a treia să ne dea patratul primei cifre, iar ultima cifră să fie un patrat perfect.*

STANESCU N. POMPILIU

Fie $a\,b\,c\,d$ numărul cerut. Conform enunţului:

$$b\,c = a^2$$

d = patrat perfect,

$b\,c$ poate fi, 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81, iar a respectiv, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Atunci $a\,b\,c\,d$ ar putea fi:

(1) 101 d, 204 d, 309 d, 416 d, 525 d, 636 d, 749 d, 864 d, 981 d.

Ţinând seamă de terminaţiile de două cifre ale unui patrat perfect: 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96, şi de faptul că d este patrat perfect, deci, 0, 1, 4, 9, rezultă, că numerile din şirul (1) ar putea da pentru $a\,b\,c\,d$:

2041, 2044, 2049, 4161, 4164, 4169, 6361, 6364, 6369, 8641, 8644, 8649.

Numerile 2049, 4161, 4164, 6369 nu's patrate perfecte fiind divizibile cu 3 fără a fi şi cu 9.

Dintre numerile rămase numai 8649 este patrat perfect:

$$8649 = 93^2.$$

Soluţii date de d-nii: *Boerescu P. George* (lic. Oltenita), *Carp I. Ignat* (Chişinău), *Costache Nicolae* (lic. Oltenita), *Cuciureanu Ştefan* (lic. Milit, Iaşi), *Dumitrescu C-tin* (lic. Focşani), *Fericeanu Ştefan* (student, Bucureşti), *Gavrilescu V.* (Braşov), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ioanitescu D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mereuţă Emil* (lic. P.-Neamţ), *Mihalcea Emil* (student), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Raciu Gh. Raiceff* (absolvent, Silistra), *Schuller D.* (absolvent), *Şerban V. D-tru* (lic. Oltenita), *Tutoveanu Valeriu* (absolvent, Roman) şi *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu).

Au mai trimes soluţii, d-nii: *Aldea N.* (absolvent, lic. M-rea Dealul), *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat. Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Măcănescu Cr. Ioan* (lic. Târgovişte) şi *Ţiucra Mircea* (absolvent, Timişoara).

Observare. D-l *Ghişoiu I. Petre*, soluţionează şi problema: *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel ca numărul format de cifra a treia urmată de a doua să dea patratul primei cifre, iar ultima cifră se fie un patrat perfect.*

Găseşte:

$$2401 = 49^2,\quad 8464 = 92^2.$$

804[1]). — *Să se arate că numerile din şirul:*

25, 9025, 990025, 99900025....

sunt patrate perfecte:

N. G. BOTEA

1) Enunţ rectificat.

Considerăm unul din numerile date:

$$N = 99\ldots900\ldots025,$$

format din n de 9, n zeruri terminat cu 25. $(n = 0, 1, 2, \ldots n)$.

Putem scri:

$$N = 9 \cdot 10^{n+2}(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}) + 25.$$

Efectuând suma progresiei geometrice din paranteză, avem:

$$N = 9 \cdot 10^{n+2}\frac{10^n - 1}{9} + 25 =$$

$$10^{2n+2} - 10^{n+2} + 25,$$

sau încă:

$$N = (10^{n+1} - 5)^2 = 99\ldots95^2 \text{ cu } n \text{ de } 9.$$

N este deci un patrat perfect.

Soluții date de d-nii: *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Schuler David* (absolvent) și *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu).

807. — *Să se dovedească că ecuațiile:*

$$4abcx^2 + 4(a^3 + b^3 + c^3)x + 9abc = 0$$

$$3(a + b + c)x^2 + 2\sqrt{2}(ab + bc + ca)x + 2abc = 0,$$

au rădăcinele reale, a, b, c fiind reali.

CEZAR COSNITA.

Fie R_1 și R_2 realizanții celor două ecuații, putem scri:

$$R_1 = 4(a^3 + b^3 + c^3)^2 - 36a^2b^2c^2$$

$$R_2 = 2(ab + bc + ca)^2 - 6abc(a + b + c).$$

In virtutea inegalității:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \geqq 3x_1x_2x_3,$$

din „R. M. T.", an. VIII. No. 9, pag. 136, putem scri:

$$a^6 + b^6 + c^6 \geqq 3a^2b^2c^2$$

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geqq 3a^2b^2c^2.$$

Multiplicând cu 2 inegalitatea a 2-a și adunând-o la prima, avem:

$$(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geqq 9a^2b^2c^2,$$

sau:

$$4(a^3 + b^3 + c^3) - 36a^2b^2c^2 \geqq 0,$$

ceiace dovedește că:

$$R_1 \geqq 0,$$

și deci prima ecuație are rădăcinele reale. Să luăm realizantul celei de a 2-a ecuații, putem scri succesiv:

$$R_2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 2a^2bc - 2ab^2c -$$

$$2abc^2 = (ab - ac)^2 + (ac - bc)^2 + (bc - ab)^2.$$

Cum a, b, c sunt numere reale, rezultă:

$$R_2 > 0,$$

deci și ecuația 2-a din enunț are rădăcini reale.

Soluții date de d-nii: *Carp Ignat* (Chișinău), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova). *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Marineanu Traian* (student, București), *Mihalcea Emil* (student), *Raciu Gh. Raicefț* (lic. Silistra), *Țiucra Mircea* (absolvent, Timișoara) și *Vâlceanu N. Iustin* (absolvent, Tg.-Jiu).

808. — *Să se rezolve ecuația:*

$$2\sin^2 x - \sqrt{5}\cos x + \frac{\sqrt{5}}{2} = 0.$$

EMIL MEREUTA

Inlocuind:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

ecuația se poate scri:

$$4\cos^2 x + 2\sqrt{5}\cos x - (4 + \sqrt{5}) = 0.$$

De aci deducem:

$$\cos x = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{21 + 4\sqrt{5}}}{4}.$$

Dar:

$$\sqrt{21 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{(1 + 2\sqrt{5})^2} = 1 + 2\sqrt{5},$$

astfel că:

$$\cos x = \frac{-\sqrt{5} \pm (1 + 2\sqrt{5})}{4}.$$

Nu putem lua decât semnul + înaintea parantezei, căci dacă am lua —, am avea:

$$\cos x < -1,$$

şi nu există nici un arc real care să satisfacă această inegalitate.

Aşa dar:

$$\cos x = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

deci:

$$x = 2k\pi \pm 36^0, \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Soluţie dată de d-nii: *Chirilă Cheorghe* (lic. Milit., Iaşi), *Cristal Gh.* (Şc. superioară de Arte şi Meserii, Iaşi), *Fericeanu Ştefan* (student, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ioaniţescu Gh. Dtru* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mihalcea I. Emil* (student). *Negrea A. Leonte Mircea* (student, Bucureşti), *Schuler David* (absolvent) şi *Ţiucra Mircea* (absolvent, Timişoara).

PROBLEME PROPUSE

826. — Să se găsească un număr de patru cifre, care se descompune în doi factori primi, unul de o cifră şi altul de trei cifre terminat cu 43. Suma cifrelor numărului cerut este 21.

V. ALACI

827. — Să se găsească patratele perfecte de forma:

$$a\,b\,c\,c\,c\,d, \qquad b\,d\,c\,c\,c\,a,$$

ştiind că avem:

$$d - a = 2c$$

HARALAMB P. IONESCU

828. — Fie O şi O′ două cercuri egale aşa fel ca fiecare din ele să treacă prin centrul celuilalt. Dacă centrul O este fix, iar celalt O′ se mişcă pe o dreaptă ce trece prin O, să se găsească locul geometric al punctelor de intersecţie ale celor două cercuri.

JUSTIN N. VALCEANU

829. — Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{x^2-xy+y^2}{(y+z)(z+x)} + \frac{y^2-yz+z^2}{(z+x)(x+y)} + \frac{z^2-zx+x^2}{(x+y)(y+z)} \geq \frac{3}{4}$$

câtimile x, y, z fiind reale şi pozitive.

CEZAR COSNITA

830. — Să se rezolve ecuaţia:

$$x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}} = x + x^{-1}$$

IG. I. CARP

831. — Să se demonstreze că dacă x_1, x_2 şi $x_1 x_2$ sunt rădăcinele ecuaţiunei:

$$x^3 + p x^2 + q x + r = 0,$$

atunci x_1 şi x_2 sunt rădăcinile ecuaţiunei:

$$(p-1)X^2 - [q - r + p(1-p)]X - (q-r) = 0,$$

iar p, q, r sunt legaţi prin relaţiunea:

$$r(p-1)^2 + (q-r)^2 = 0.$$

Să se examineze cazul particular când p este egal cu unitatea:

COL. GH. BUICLIU

832. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_b^2 r_a^2} + \frac{1}{h_a^2 r_b^2} - \sum\left(\frac{1}{h_a r_b} - \frac{1}{h_b r_a}\right)^2\right] = \sum \frac{1}{h_b h_c r_b r_c} - \frac{1}{h_c}\left(\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2}\right),$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

MARINEANU TRAIAN

833. — Să se rezolve sistemul:

$$\frac{a \operatorname{arc\,tg} x}{k_1} = \frac{b \operatorname{arc\,tg} y}{k_2} = \frac{c \operatorname{arc\,tg} z}{k_3}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz} = k_4 \pi,$$

k_1, k_2, k_3, k_4, pot avea una din valorile $1, 2, 3, \ldots n$. Caz particular, $a = b = c = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$.

ION MARGINEANU

INFORMAȚIUNI

Rezultatul la Concursul „R. M. T.“[1])

Cl. VIII.

1. *Albeață N. Ermil* (lic. P.-Neamț), 591, 572, 603, 614, 615, 623, 624, 626, 632, 674, 675, 676*, 678, 680*, 681, 684, 685*, 686*, 687, 688*.

(46).

2. *Crăciunescu Eugeniu* (lic. Buzești, Craiova), 614, 615, 624, 626, 676*, 680*, 681, 685*, 686*, 687, 709.

(30).

3. *Dimitriu At. Ioan* (lic. Galați), 579, 585, 614, 615, 621, 624, 626, 632, 633, 637, 674, 675, 676*, 677*, 679, 684, 688*, 689, 693*, 696*, 699*, 704, 707*, 708*, 716, 717, 718, 719*, 720, 721, 722, 723, 726, 727, 728*, 730, 733*, 734, 741*, 747, 748, 749, 751*.

(115).

4. *Dragoș Tiberiu* (lic. Arad), 681.

(2).

5. *Gheorghiu Th. Gh.* (lic. Galați), 573, 574, 578, 568, 580, 584, 593, 602, 572, 585, 614, 674, 675, 676*, 677*, 678, 679, 680*, 681, 684, 685*, 687, 688*, 691, 696*, 697, 698, 699*, 700, 701*, 703*, 704, 705, 706, 707*, 708*, 709, 710, 711*, 712, 713*, 714*, 715, 717, 720, 721, 722, 726, 727, 734, 746.

(133).

6. *Haim F. L.* (lic. Piatra-Neamț), 603, 614, 618, 625, 626, 620, 674, 676*, 681, 687.

(17).

7. *Hohoi Vasile* (lic. Brașov), 623, 624, 619, 674, 675, 676*, 678, 680*, 688*, 708*, 717, 718, 719*, 720, 722.

(42).

8. *Pantu Z. Ion* (lic. Lazăr, București), 578, 579, 595, 596' 609, 584, 591, 602, 578, 583, 585, 603, 604, 614, 615, 618, 621, 623, 624, 626, 633, 637, 620, 627, 630, 674, 675, 676*, 677*, 678, 679, 680*, 681, 682*, 683, 684, 685*, 687, 688*, 689, 692*, 693*, 694, 696*, 697, 698, 700, 703*, 704, 705, 706, 707*, 708*, 711*, 712, 713*, 714*, 716, 717, 718, 719*, 720, 721, 722, 725*, 726, 727, 728*, 730, 732*, 733*, 734, 735, 736, 737*, 738, 740, 741*, 744, 745*, 746, 747, 749, 751*.

(215).

9. *Popescu P. Eugen* (lic. T.-Severin), 623, 626, 620, 674, 675, 677*, 680*, 681, 684, 687, 688*, 689, 704, 707*, 712, 720, 722, 723, 741*.

(50).

10. *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), 573, 579, 596, 591, 601, 602, 572, 585, 603, 604, 605, 618, 624, 626, 637, 620, 630, 675, 676*, 677*, 678, 679, 680*, 681, 682*, 683, 684, 685*, 686*, 687, 688*, 689, 692*, 693*, 694, 696*, 697, 698, 700, 701*, 703*, 704, 705, 706, 707*, 708*, 711*, 712, 714*, 716, 717, 718, 720, 722, 723, 724, 725*, 726, 727, 728*, 729*, 730, 731, 732*, 733*, 734, 735, 736, 737*, 738, 739, 740, 741*, 742*, 744, 746, 747, 748, 749, 750, 751*.

(220).

11. *Sprinceană C. Gheorghe* (lic. Galați), 579, 593, 585, 614, 615, 621, 624, 626, 632, 633, 637, 674, 675, 676*, 677*, 678, 679, 681, 684, 685*, 686*, 687, 688*, 689, 691, 692*, 696*, 697, 698, 701*, 703*, 704, 705, 706, 707*, 708*, 710, 711*, 712, 713*, 716, 717, 718, 719*, 720, 721, 722, 723, 725*, 726, 727, 728*, 730, 731, 732*, 733*, 734, 735, 736, 737*, 739, 740, 741*, 742*, 744, 747, 748, 751*,

(191).

Numărul maxim de puncte:

$37 \times 1 = 37$

$31 \times 5 = 155$

$47 \times 2 = 94$

Total: **286.**

Printr'o regretabilă eroare de culegere și de corectare a probelor de tipar, a fost omis din tabloul numelor volumului VIII al R. M. T., d-l *I. Murăroiu* unul din cei mai entuziaști corespondenți ai revistei.

Tabla de materii a volumului IX va cuprinde o erată care va rectifica această scăpare.

Rugăm cu acest prilej pe toți corespondenții, care au remarcat erori în tabloul numelor vol. VIII să ni-le semnaleze din vreme, pentru ca erata ce se va publica la finele volumului IX să rectifice și alte erori, care eventual s'ar fi strecurat în vol. VIII.

Recomandăm călduros corespondenților noștri, cartea „*Gândirea Matematică*“ a d-lui profesor universitar *Petre Sergescu*, premiată de *Academia Română*.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul VIII, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

---

1) Problemele rezolvate și numărul total de puncte obținute de fiecare concurent.

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 AUGUST 1929 No. 6

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. COL. GH. BUICLIU. PROBLEME IDENTICE.
2. NOTE MATEMATICE, 15, 16,
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 473, 474, 475, 502, 509, 512, 540, 789.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu** Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

ANUL IX — NO. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1929

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

PROBLEME IDENTICE

de COL GH. BUICLIU

Identice, sunt evident problemele care au enunțuri la fel, dar tot identice sunt și problemele care, de și au enunțuri cu totul diferite, rezolvă însă aceiași chestiune și dau aceleași rezultate.

Dau ca exemple perechile de probleme care urmează.

I. Problema 508 rezolvată la pagina 55 din *Revista Matematică din Timișoara* este tot una cu problema 512 publicată în acest număr și cu toate acestea problema 508 a fost rezolvată de 33 corespondenți pe când problema 512 a fost rezolvată abea de 3 corespondenți, dintre care 2 sunt din acei care au rezolvat și problema 508, fără să observe apropierea între cele două probleme.

Pentru a arăta identitatea celor două probleme, dau problemei 508 o soluție diferită de acea publicată la pagina 55

Fie x numărul de nuci din sac. Arunc o nucă, rămân în sac $x-1$ nuci din care:

(1) A, ia . . . . $\frac{x-1}{4}$.

In sac vor rămâne acum:

$$x-1-\frac{x-1}{4}=\frac{3x-3}{4}$$

nuci. Din acestea arunc o nucă, de i în sac rămân:

$$\frac{3x-3}{4}-1=\frac{3x-7}{4}$$

(2) B, ia . . . . $\frac{1}{4}\left[\frac{3x-7}{4}\right]=\frac{3x-7}{16}$.

Acum vor rămâne în sac:

$$\frac{3x-3}{4}-1-\frac{3x-7}{16}=\frac{9x-21}{16}.$$

Din acestea arunc o nucă, rămân în sac:

$$\frac{9x-21}{16}-1=\frac{9x-37}{16}$$

(3) C, ia . . . . $\frac{9x-37}{64}$.

Rămân deci în sac:

$$\frac{9x-37}{16}-\frac{9x-37}{64}=\frac{27x-111}{64}.$$

Arunc acum din nou o nucă și rămân în sac:

$$\frac{27x-111}{64}-1=\frac{27x-175}{64},$$

din care:

(4) D, ia . . . . $\frac{27x-175}{256}$,

și mai rămân în sac:

(5) $\frac{27x-175}{64}-\frac{27x-175}{256}=\frac{81x-525}{256}$.

După aceste distribuții au mai rămas neîmpărțite cele 4 nuci aruncate din sac și nucile exprimate prin numărul (5) de mai sus, adică au rămas:

$$4+\frac{81x-525}{256}=\frac{81x+499}{256}.$$

Din acestea mai ia fiecare din cele 4 persoane, câte:

(6) $\frac{1}{4}\left[\frac{81x+499}{256}\right]=\frac{81x+499}{1024}$

nuci. Acum adunând (6) pe rând cu (1), cu (2), (3) și (4) găsim că partea fiecărei persoane este respectiv:

A $$\frac{x-1}{4}+\frac{81x+499}{1024}=\frac{337x+243}{1024}$$

B $$\frac{3x-7}{16}+\frac{81x+499}{1024}=\frac{273x+51}{1024}$$

C $$\frac{9x-37}{64}+\frac{81x+499}{1024}=\frac{225x-93}{1024}$$

D $$\frac{27x-175}{256}+\frac{81x+499}{1024}=\frac{189x-201}{1024}.$$

Cum partea fiecăreia din cele 4 persoane trebue să fie întreagă, rezultă că numerile $337x+243$, $273x+51$, $225x-93$ şi $189x-201$ trebue să fie simultan divizibile prin:

$$1024=2^{10},$$

adică tocmai problema 512.

II. *Alt exemplu de probleme identice.* Este cunoscută teorema publicată în mai toate tratatele de geometrie.

Ortocentrul H *al unui triunghiu* A B C *împarte înălţimele* A A′, B B′, C C′ *în segmente ale căror produse sunt egale.*

Deci:

(7) $$HA\,.\,HA'=HB\,.\,HB'=HC\,.\,HC'.$$

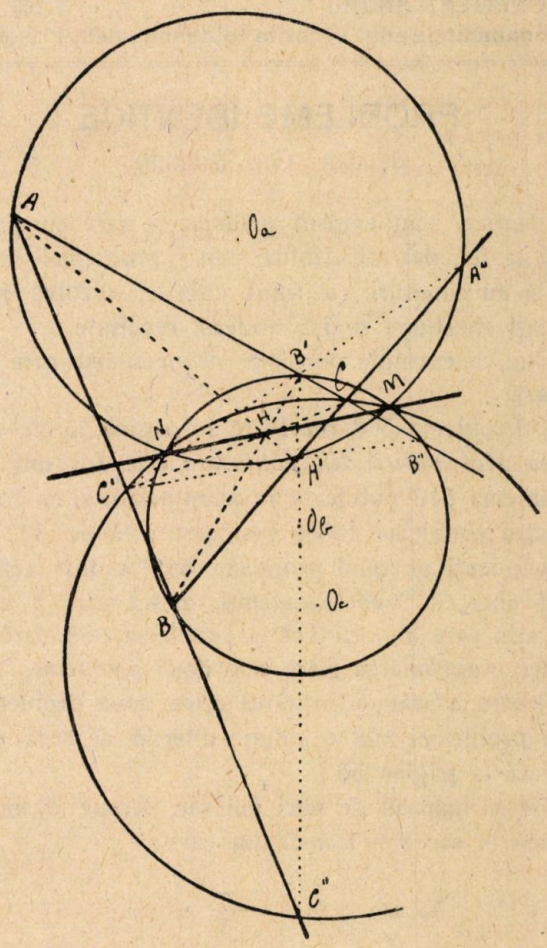
Aceste relaţii se demonstrează în general cu ajutorul triunghiurilor asemeni.

Când elevii mai avansează în cunoştinţe geometrice atunci află că produsul H A . H A′ este puterea lui H faţă de un cerc care trece prin A şi A′, iar relaţiile (7) exprimă că punctul H este centrul radical al tuturor cercurilor care trec respectiv prin A, A′; B, B′ şi C, C′ şi reciproc.

Problema 473, care se publică în acest număr, este tocmai teorema de mai sus pentru o serie de cercuri particulare, anume acelor de diametru A A″, B B″, C C″ care trec respectiv prin perechile de puncte (A, A′), (B, B′), (C, C′) şi în care A″, B″, C″ sunt colineare.

Concluzia celor publicate în acest articol ar părea în dezavantajul propunătorului problemelor 473 şi 512, care a propus probleme deja cunoscute. Nu este însă aceasta concluzia articolului de faţă scris tocmai de propunătorul problemelor 473 şi 512.

Concluzia este cu totul alta. In matematici rezolvarea problemelor se face ţinând strânsă legătură între premize, concluzii şi cunoştinţele anterioare. Această recomandaţie o dau toate tratatele şi toţi profesorii şi o repetă articolul de faţă.



Cine are cunoştinţe *anterioare* şi ştie să le lege cu problema care i se prezintă, va putea rezolva problema. Cei 33 de corespondenţi care au căutat şi găsit pe a_1, a_2, a_3 astfel ca numerele:

$$\frac{16a_1+1}{3};\quad \frac{64a_2-19}{3};\quad \frac{256a_3+61}{3},$$

să fie întregi pentru a rezolva problema 508, puteau căuta şi găsi absolut pe aceiaşi cale pe N astfel ca:

$$\frac{337N+243}{1024},$$

să fie întreg. Şi ar fi rezolvat şi problema 512, în aparenţă mai grea.

Cine cunoaşte relaţia (7) din geometrie şi ştie să-i dea toate interpretările, şi când ştie că punctele A'', B'', C'' sunt colineare vede imediat soluţia problemei 473, în care H are aceiaşi putere faţă de cercurile $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$.

Aceste concluzii sunt foarte importante pentru corespondenţii unei reviste elementare, ca a noastră, şi de aceia am ţinut să le reamintesc.

Ele vor mai fi repetate, de sigur la diferite intervale în revistă, şi pentru alte serii de corespondenţi.

NOTE MATEMATICE

15. *Asupra unei identităţi.* In „Questions d'arithmétique" de *B. Niewenglowski,* la exerciţiul 213 se demonstrează că numărul $6n-1$ se poate pune sub forma:

$$9n^2-h^2,$$

luând $h=3n-1$ şi că, dacă $9n^2-h^2$ este prim, trebue ca:

$$h=3n-1.$$

Chestiunea se poate întrucâtva aprofunda. Vreau să arăt că numărul $2ax-1$ se poate pune sub forma:

$$a^2x^2-y^2,$$

propunându-mi să aflu pe y. In adevăr, am:

$$2ax-1=ax+ax-1.$$

Să punem:

$$y=ax-1,$$

de unde:

$$ax-y=1.$$

Şi, deci:

$$2ax-1=ax+y,$$

sau, încă:

$$2ax-1=a^2x^2-y^2.$$

Reciproc, dacă numărul $a^2x^2-y^2$ este prim, trebue ca $ax-y=1$, adică $y=ax-1$ şi, prin urmare:

$$a^2x^2-y^2=a^2x^2-(ax-1)^2=2ax-1.$$

La fel se demonstrează că numărul $2ax+1$ se poate pune sub forma:

$$(ax+1)^2-y^2,$$

şi se găseşte $y=ax$.

Dacă numărul $(ax+1)^2-y^2$ e prim, avem:

$$(ax+1)^2-y^2=2ax+1.$$

I. MURAROIU

16. *Asupra triunghiurilor în care avem* $2a^2=b^2+c^2$.

Voi stabili în această notă câteva relaţii între elementele triunghiurilor ale căror laturi verifică relaţia:

$$2a^2=b^2+c^2$$

şi care au fost stabilite incidental cu ocazia studierei unor proprietăţi ale acestor triunghiuri, proprietăţi care vor forma obiectul unui articol.

1. Cunoaştem expresiile patratelor lungimilor medianelor şi anume:

$$m_a^2=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\frac{a^2}{2}\right);\quad m_b^2=\frac{1}{2}\left(c^2+a^2-\frac{b^2}{2}\right);$$

$$m_c^2=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-\frac{c^2}{2}\right),$$

sau:

$$m_a^2=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-\frac{a^2}{2}\right);$$

$$m_b^2=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2+a^2-\frac{3b^2}{2}\right);$$

$$m_c^2=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2+a^2-\frac{3c^2}{2}\right),$$

ţinând seamă de: $2a^2=b^2+c^2$ avem:

$$m_a^2=\frac{1}{2}\left(2a^2-\frac{a^2}{2}\right)=\frac{3}{4}a^2;$$

$$m_b^2=\frac{3}{2}\left(a^2-\frac{b^2}{2}\right)=\frac{3}{4}c^2;$$

$$m_c^2=\frac{3}{2}\left(a^2-\frac{c^2}{2}\right)=\frac{3}{4}b^2.$$

Prin adunare obținem:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{9}{4}a^2.$$

2. In un triunghiu oarecare avem relațiile:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ și } 2s = bc\sin A$$

$$\therefore \quad \operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4s}$$

analog avem:

$$\operatorname{cotg} B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4s}; \quad \operatorname{cotg} C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4s}$$

Adunăm ultimele relații și avem:

$$\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \frac{2a^2}{4s}.$$

Dacă ținem seama de $2a^2 = b^2 + c^2$ avem:

$$\operatorname{cotg} A = \frac{a^2}{4s},$$

deci:

$$\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A = 2\operatorname{cotg} A.$$

3. Din relația: $\operatorname{cotg} A = \frac{a^2}{4s}$ deducem:

$$s = \frac{a^2}{4\operatorname{cotg} A}.$$

Ridicăm relația: $bc\sin A = 2s$ la patrat:

$$4s^2 = b^2c^2\sin^2 A$$

$$\therefore \quad b^2c^2 = \frac{4s^2}{\sin^2 A} = 4s^2(1 + \operatorname{cotg}^2 A).$$

Scoatem valoarea lui $\operatorname{cotg}^2 A$:

$$\operatorname{cotg}^2 A = \frac{b^2c^2 - 4s^2}{4s^2}$$

$$\therefore \quad \operatorname{cotg} A = \frac{1}{2s}\sqrt{b^2c^2 - 4s^2}.$$

In mod analog:

$$\operatorname{cotg} B = \frac{1}{2s}\sqrt{a^2c^2 - 4s^2}; \quad \operatorname{cotg} C = \frac{1}{2s}\sqrt{a^2b^2 - 4s^2}$$

Deci:

$$\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C =$$

$$\frac{1}{2s}\left[\sqrt{a^2b^2 - 4s^2} + \sqrt{b^2c^2 - 4s^2} + \sqrt{a^2c^2 - 4s^2}\right],$$

Mai avem:

$$\operatorname{cotg}^2 A + \operatorname{cotg}^2 B + \operatorname{cotg}^2 C =$$

$$\frac{1}{4s^2}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 - 12s^2) =$$

$$\frac{1}{4s^2}\left(2a^4 + \frac{a^4}{4} + 4s^2 - 12s^2\right) = \frac{1}{4s^2}\left(\frac{9a^4}{4} - 8s^2\right).$$

In mod analog se pot stabili și alte relații.

AUREL PARVU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV, No. 11, Iulie 1929. Primul congres al matematicienilor români, de *Petre Sergescu*. Liniile frânte echilatere înscrise unui acelaşi unghiu, de *D. Barbelian*. Câteva proprietăți ale şirurilor cu ter meni pozitivi, de *Miron Nicolescu*. Asupra unei ecuațiuni diferențiale, de *T. Popovici*.

2. *Georges Bouligand*. Compléments et exercices sur a Mecanique des solides. (Cinématique, Frottement, sys-- témes non holonomes, choc et percussions avec frottement, liaison unilatèrales). Paris, librairie Vuibert, 1929.

3. *E. Laine*. Premières leçons de géometrie analytique et de géometrie vectorielle. Paris, librairie Vuibert, 1929

PROBLEME REZOLVATE

473. — *Fie* A″, B″, C″ *punctele unde laturile unui triunghiu* ABC *sunt întâlnite de laturile corespunzătoare ale triunghiului său ortic* A′B′C′. *Să se demonstreze că cercurile* AA′A″, BB′B″, CC′C″ *au o coardă comună care trece prin ortocentrul triunghiului* ABC.

COL. GH. BUICLIU

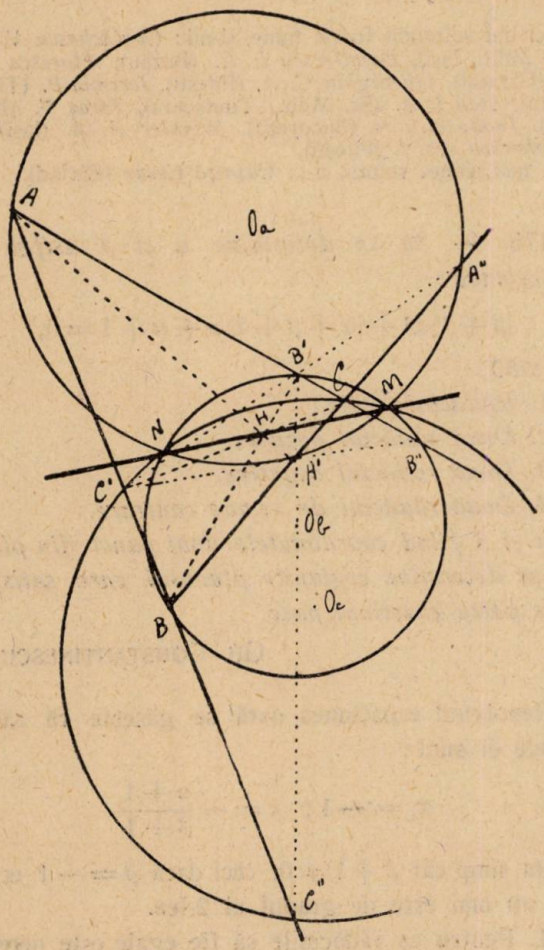
Sunt cunoscute relațiunile:

1) $\quad HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC',$

care se pot stabili ușor cu ajutorul triunghiurilor asemenea.

Cum H se află pe coardele AA′, BB′, CC′, rezultă că fiecare din membrii egalităților (1) reprezintă puterile lui H față de cele 3 cercuri, puteri care fiind egale conchid că H este centrul radical al celor 3 cercuri. Deci dacă acele cercuri se taie, coarda comună lor va trece prin H.

Pentru a arăta că cercurile $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ se taie neapărat, voi considera 2 cazuri de figură.

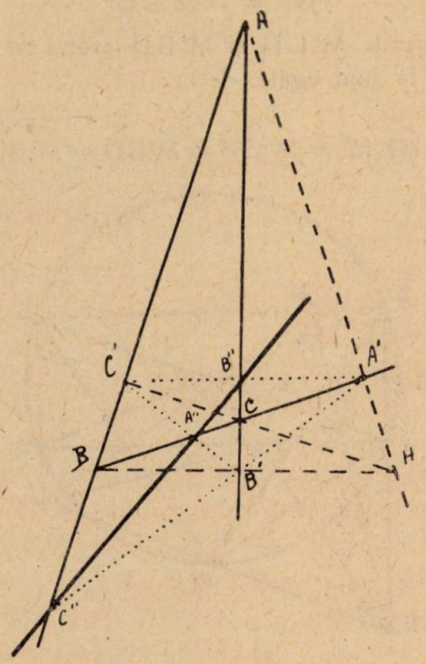


1. *Triunghiul* ABC *are toate unghiurile ascuţite.* In acest caz punctele A', B', C' cad pe laturi în interior, iar A'', B'', C'' pe prelungirile laturilor triunghiului ABC aşa că AA' şi AA'' cuprind între ele latura AC deci un cerc care va trece prin A şi A' se va tăia neapărat cu un cerc care va trece prin B, B' şi B''. Aceasta se poate vedea şi din aceia că AA' taie BB'' între B şi B'' iar BB' taie pe AA' între A şi A'.

2. *Triunghiul* ABC *are un unghiu obtuz, de exemplu* $C > 90^0$. In acest caz A', B' cad pe prelungirile BC, AC, iar A'', B'' cad între B, C şi între A, C. Cum:

$$AA'' > AC > AA'.$$

Cercul $AA'A''$ va cuprinde în interiorul lui



B'', deci cercul $BB'B''$ se taie neapărat cu cercul $AA'A''$. Coarda comună trece prin H.

La această problemă s'au primit 3 soluţiuni necomplecte şi neriguroase.

Una din soluţii a demonstrat că centrele cercurilor sunt colineare şi a conchis că ele au *o coardă comună*. Aceasta nu este adevărat, se poate convinge oricine uşor desemnând 3 cercuri cu centrele pe o linie dreaptă, fără ca ele să se întretaie. Numai reciproca e adevărată. Dacă 3 cercuri au o coardă comună, centrele lor sunt în linie dreaptă.

Asupra problemei 473, să se vadă şi articolul *Probleme identice*, care se publică la începutul acestui număr.

474. — *Printr'un punct* M *de pe o latură* AB *a dreptunghiului* $ABCD$ *înscris în cercul* O, *se duce o dreaptă oarecare până întâlneşte latura opusă în* H *şi apoi cercul* O *în* M'. *Prin* M' *se duce perpendiculara la* MM' *până întâlneşte celelalte laturi* AC *şi* BD *respectiv în* K *şi* L. *Unind punctele* M, K, L *să se demonstreze că* H *este ortocentrul triunghiului* MKL *şi că picioarele înălţimelor* KK' *şi* LL' *se află pe diagonalele dreptunghiului* $ABCD$.

P. TROFIMOV

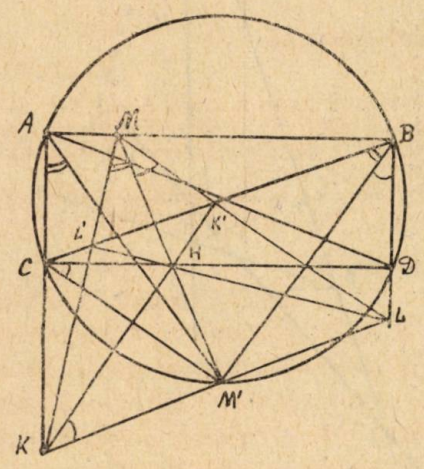
Fie K' intersecţia dreptelor KH şi ML pe KM

Din patrulaterul inscriptibil K C H M′ rezultă:

$$\overset{\frown}{HKM'} = \overset{\frown}{M'CH},$$

iar unghiurile M′C H şi M′B D având ca măsură arcul M′D sunt egale, deci:

(1) $$\overset{\frown}{HKM'} = \overset{\frown}{M'CH} = \overset{\frown}{M'BD} = \overset{\frown}{M'BL}.$$



Insă din patrulaterul inscriptibil M′MBL, rezultă:

(2) $$\overset{\frown}{M'BL} = \overset{\frown}{M'ML} = \overset{\frown}{M'MK'}.$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$\overset{\frown}{M'MK'} = \overset{\frown}{MKM'} = \overset{\frown}{K'KM'},$$

deci patrulaterul K M K′ M′ este inscriptibil şi cum $\overset{\frown}{MM'K}$ este drept prin construcţie, rezultă că şi $\overset{\frown}{KK'M'}$ este drept. Deci K K′ e înălţime în triunghiul K M L, cum şi M M′ e înălţime, rezultă că H e ortocentrul acestui triunghiu, iar L L′ este cea de a treia înălţime.

Să dovedim acum că L′ şi K′ se află pe C B.

Fie L_1 intersecţia dreptelor K M şi CB. Patrulaterul A M M′ K fiind inscriptibil avem:

(3) $$\overset{\frown}{KAM'} = \overset{\frown}{KMM'} = \overset{\frown}{L_1MM'},$$

Apoi din patrulaterul înscris C A B M′ deducem:

(4) $$\overset{\frown}{CAM'} = \overset{\frown}{CBM'} = \overset{\frown}{KAM'},$$

(3) şi (4) arată că:

$$\overset{\frown}{L_1MM'} = \overset{\frown}{L_1BM'},$$

deci L_1 M B M′ e inscriptibil, dar cercul M B M′ treçe prin L şi L′ căci unghiurile M B L, L M′ M L L′ M sunt drepte, deci L_1 se confundă cu L′, sau ceiace este tot una, L′ se află pe C B. La fel se arată că K′ se află pe A D.

Au dat soluţiuni foarte bune, d-nii: *Costăchescu V. C.* (lic. Milit., Iaşi), *Dumitrescu I. E.* (Buzău), *Florescu M. O.* (Caracal), *Gheorghiu C. A.* (Piteşti), *Ieremia P.* (Timişoara), *Stan I. A.* (Şc. Milit., Timişoara), *Tăraş V.* (Braşov). *Teodorescu N.* (Bucureşti), *Winkler A. A.* (Iaşi) şi *Zamfirescu Gh. I.* (Piteşti),

A mai trimes soluţii, d-l: *Coşniţă Cezar* (Bârlad).

475. — *Să se determine* α *şi* β *astfel ca ecuaţiunea:*

$$(\beta+1)x^2+(\alpha+\beta+2)x+\alpha+1=0,$$

să aibă:

1. *Rădăcini egale.*
2. *Două rădăcini pozitive.*
3. *Două rădăcini negative.*
4. *Două rădăcini de semne contrare.*

α *şi* β *fiind coordonatele unui punct din plan, să se determine regiunile planului care satisfac cele patru chestiuni puse.*

GH. CONSTANTINESCU

Rezolvind ecuaţiunea dată se găseşte că rădăcinele ei sunt:

$$x_1 = -1\,;\quad x = -\frac{\alpha+1}{\beta+1},$$

atâta timp cât $\beta+1 \neq 0$, căci dacă $\beta=-1$ ecuaţia nu mai este de gradul al 2-lea.

1. Pentru ca rădăcinile să fie egale este necesar şi suficient ca:

$$-\frac{\alpha+1}{\beta+1} = -1$$

(1) $$\therefore\quad \alpha-\beta=0.$$

2. Condiţiunea aceasta nu se poate realiza de oarece o rădăcină este egală cu -1.

3. Pentru aceasta trebue să avem:

$$x_2 < 0 \qquad \therefore\ \frac{\alpha+1}{\beta+1} > 0$$

(2) $$\therefore\quad \alpha+1>0 \text{ şi } \beta+1>0, \text{ simultan,}$$

sau:

(3) $$\alpha+1<0 \text{ şi } \beta+1<0, \text{ simultan.}$$

4. Trebue ca $x_3 > 0$ sau:

$$\frac{\alpha+1}{\beta+1} < 0$$

(4) $\therefore$ $\alpha+1<0$ şi $\beta+1>0$, simultan,

sau:

(5) $\therefore$ $\alpha+1>0$ şi $\beta+1<0$, simultan.

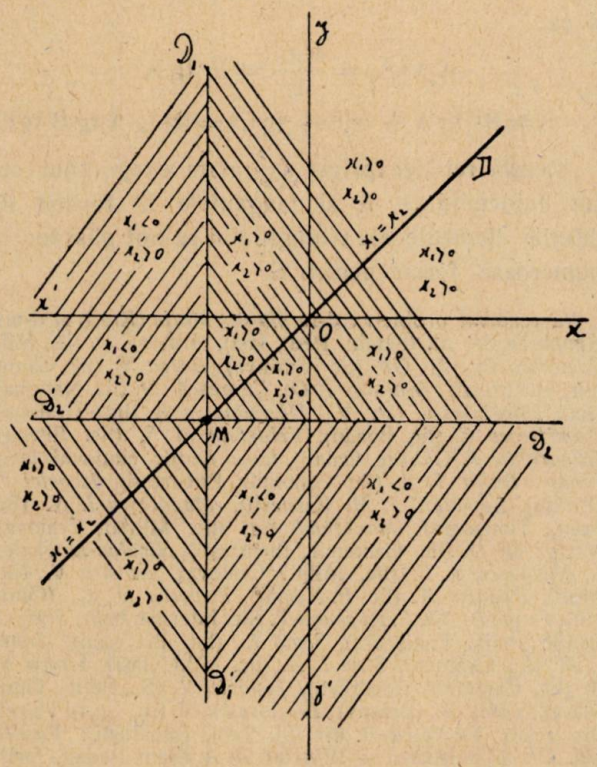
Pentru reprezentarea grafică a discuţiei să construim dreptele:

(D) $$\alpha - \beta = 0$$

(D_1) $\alpha+1=0$ şi (D_2) $\beta+1=0$.

Dreptele D_1 şi D_2 se taie într'un punct M pe D.

Toate punctele (α, β) de pe (D) satisfac evident condiţiei (1) căci au coordonatele egale.



Toate punctele din unghiul $D_1 M D_2$, afară de acelea de pe (D) satisfac condiţiilor (2), iar acelea din unghiul $D_1' M D_2$ condiţiilor (3).

Punctele din unghiurile $D_2' M D_1$ şi $D_1' M D_2$ satisfac respectiv condiţiilor (4) şi (5).

Punctul M(— 1, — 1) transformă ecuaţia dată în o identitate.

Punctele de pe (D_1) satisfac condiţiei (4) căci ecuaţia se reduce la:

$$x(x+1)=0.$$

Punctele de pe (D_2) reduc ecuaţia la o ecuaţie de gradul I:

$$x+1=0.$$

cu o ecuaţie negativă.

Au dat soluţia şi graficul exact, d-nii: *Bârs P.* (lic. Sibiu), *Gradin Î. Gh.* (Şc. Polit., Timişoara), *Iscovici P.* (Piteşti), *Nestor G. D.* (lic. Cantemir, Bucureşti) şi *R...* indescifrabil *P.* (lic. Arad).

Problema este prea uşoară pentru a mai menţiona soluţiunile parţiale sau a acelor cu graficul greşit.

502. — *Fie* O *cercul circumscris triunghiului* A B C *şi* t_a, t_b, t_c *porţiunile de tangentă în punctele de intersecţie ale razelor perpendiculare pe laturi, cu cercul, cuprinse între prelungirile razelor ce trec prin extremitatea laturilor a, b, c.*

Să se demonstreze relaţiile:

1°. $$\sum \frac{1}{t_a} \cdot \frac{1}{t_b} = \frac{1}{4R^2}$$

2°. $$\sum \frac{1}{t_a} = 4R^2 \left(\frac{1}{t_a t_b t_c} + \frac{1}{a b c} \right).$$

Să se calculeze în funcţie de elementele triunghiului A B C, *aria exagonului format prin unirea extremităţilor segmentelor de tangentă.*

C. IONESCU-BUJOR

Fie A' şi A'' mijlocul coardei şi arcului B C. Tangenta în A'' este paralelă cu B C şi întâlneşte razele O B, O C respectiv în A_1 şi A_2. Conform enunţului:

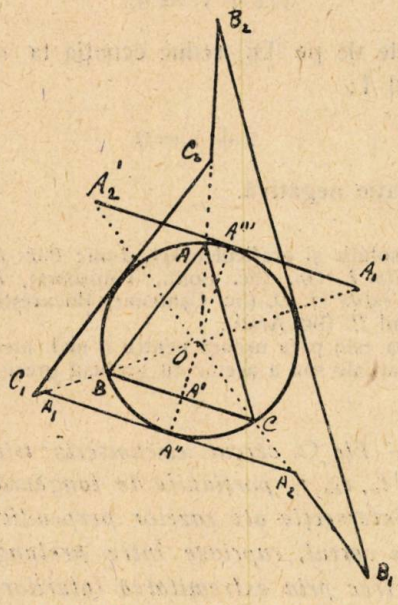
$$A_1 A_2 = t_a.$$

Pentru această definiţie am presupus că A şi A'' se află de o parte şi de alta a lui B C. Dacă însă am duce tangenta în A''' atunci t_a va fi:

$$A_1' A_2' = t_a,$$

din cauza simetriei. Tot din această simetrie rezultă deci că proprietăţile se vor menţine în cazul acelei construcţii.

Rămânem deci la tangentele paralele cu a, b, c dar separate de vârfurile A, B, C prin a, b, c.



In triunghiul dreptunghic $OA''A_2$ unghiul la centru $A''OC$ are ca măsură jumătatea arcului $BA''C$, deci este egal cu unghiul BAC. Stabilim prin urmare:

$$\overset{\frown}{A''OA_2} = \hat{A}.$$

Apoi:

(1) $$t_a = A_1A'' + A''A_2 = 2A''A_2.$$

Dar din triunghiul $A_2A''O$ se deduce:

$$A''A_2 = OA'' \operatorname{tg} A''OA_2 = R \operatorname{tg} A,$$

şi ducând în (1) se găseşte:

$$t_a = 2R \operatorname{tg} A$$

$$\therefore \quad t_b = 2R \operatorname{tg} B \quad \text{şi} \quad t_c = 2R \operatorname{tg} C.$$

1. Ţinând seamă de valorile acestea găsim:

$$\sum \frac{1}{t_a t_b} = \frac{1}{4R^2} \sum \frac{1}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B} = \frac{1}{4R^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}$$

Dar se ştie că într'un triunghiu:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

de unde se deduce imediat relaţiunea 1°.

2. Avem:

$$\sum \frac{1}{t_a} = \frac{1}{2R}\left[\frac{1}{\operatorname{tg} A} + \frac{1}{\operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} C}\right] = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}.$$

căci:

$$(1) \quad 2R \operatorname{tg} A = 2R \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{\sin A} \cdot \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{\cos A} = t_a$$

$$\therefore, \quad \sum \frac{1}{t_a} = \frac{bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C}{abc}.$$

Se ştie că:

$$bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C = 4R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

$$\therefore \quad \sum \frac{1}{t_a} = 4R^2\left(\frac{1}{abc} + \frac{\cos A \cos B \cos C}{abc}\right)$$

şi ţinând seamă de (1) se demonstrează 2°.

3. Trebue calculată suprafaţa $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ Fie S acea suprafaţă. Se vede pe figură că:

$$S = A_1OA_2 + B_1OB_2 + C_2OC_2,$$

şi că:

$$A_1OA_2 = \frac{R t_a}{2} = R^2 \operatorname{tg} A$$

$$\therefore \quad S = R^2(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C) = R^2 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

Această relaţieexprimă suprafaţa exagonului cerut. Inlocuind pe R şi tangentele în funcţie de diferite elemente ale triunghiului se pot găsi foarte numeroase forme pentru S.

Au rezolvat problema d-ra *Marias Maria* (Arad) şi d-nii: *Agapescu M. M.* (Semin. Ped., Iaşi), *Ardelea R.* (lic. Mil., Craiova), *Bey M. Gh.* (lic Craiova), *Botea N.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter I. O.*, *Cerneş A. M.* (lic. Naţional, Iaşi), *Dănciulescu Gr. V.*, *Dărmănescu I.* (lic. Craiova), *Dumitrescu E.* (lic. Buzău), *Feldstein M. S.* (lic. Piteşti), *Gheorghiu T. Gh.* (lic. Galaţi), *Iancu D.* (lic. Naţional, Iasi), *Ionescu-Bujor T. A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iscovici P.* (Piteşti), *Lepădatu I. M.* (Găneşti), *Manolescu I. N.* (Şc. Polit,, Timişoara). *Munteanu Gh.* (lic. Militar, Craiova), *Nestor G. D.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolau-Dobridor I.*, *Niculescu S. E.* (lic. Milit., Craiova), *Novacu V.* (lic. Arad), *Podariu A.* (lic. P.-Neamţ), *Popescu N. C.* (Giurgiu), *Popovici Th. I.*, *Râpeanu V.* (lic. Internat, Iaşi), *Scripcă L.* (Şc. Polit., Timişoara), *Segal L.* (lic. Botoşani), *Sobel I. M.* (lic. Craiova), *Stan I. A.* (lic. Milit., Iaşi), *Stoica N. A.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ţanovici V.* (Şc. Polit, Timişoara), *Tărăş V.* (Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gh.* (Timişoara) şi *Winkler A. A.* (Sem. Pedag., Iaşi).

A mai trimes soluţii d-nii: *Coşniţă Cezar* (Bârlad).

509. — *Să se stabilească identitatea:*

$$C_{2r+1}^{r} - \frac{C_{2r+1}^{r-1}}{3} + \ldots + (-1)^{r-1}\frac{C_{2r+1}^{1}}{2r-1} + (-1)^{r}\frac{1}{2r+1} = 2^{2r}\frac{2.4.6\ldots 2r}{1.3.5\ldots(2r+1)}.$$

V. ALACI

Luăm funcțiunea:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{x},$$

și aflăm valoarea ei pentru:

$$x + n h,\ x + (n-1) h, \ldots x + h,\ x.$$

Fie, u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, ... u_1, u_0, valorile corespunzătoare ale funcțiunei.

Diferențele de ordinul întâi ale acestor numere, sunt:

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0,\ \Delta u_1 = u_2 - u_1, \ldots \Delta u_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

Dacă procedăm tot astfel cu aceste noi cantități, avem diferențele de ordinul al 2-lea.

In fine formula pentru diferența $\Delta_n u_0$, este:

$$\Delta_n f(x) = u_n - C_n^1 u_{n-1} + C_n^2 u_{n-2} - \ldots + (-1)^n u_0.$$

Facem aci, $n = 2r+1$ și grupăm termenii echidistanți, câte doi, obținem:

$$\Delta_{2r+1} f(x) = u_{2r+1} - u_0 - C_{2r+1}^1 (u_{2r} - u_1) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r C_{2r+1}^r (u_{r+1} - u_r).$$

Ținând seama de (1) obținem:

$$\Delta_{2r+1} f(x) = \frac{1}{x + (2r+1) h} - \frac{1}{x} -$$

$$C_{2r+1}^1 \left(\frac{1}{x + 2rh} - \frac{1}{x + h} \right) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r C_{2r+1}^r \left(\frac{1}{x + (r+1) h} - \frac{1}{x + rh} \right).$$

Particularizând aci:

$$x = 2r+1,\quad h = -2,$$

avem:

$$(2) \quad \Delta_{2r+1} f(x) = -\frac{2}{2r+1} + C_{2r+1}^1 \frac{2}{2r+1} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)_2^{r+1} C_{2r+1}^r =$$

$$-2(-1)^r \left[C_{2r+1}^r - \frac{C_{2r+1}^{r-1}}{3} + \ldots + \frac{(-1)^r}{2r+1} \right].$$

Acum să aflăm direct diferența $(2r+1)^a$ a funcțiunei (1), avem succesiv:

$$\Delta_1 f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{-h}{x(x+h)}$$

$$\Delta_2 f(x) = -\frac{h}{(x+h)(x+2h)} + \frac{h}{x(x+h)} =$$

$$\frac{2h^2}{x(x+h)(x+2h)}$$

. . . . . .

$$\Delta_{2r+1} f(x) =$$

$$(-1)^{2r+1} \frac{(2r+1)!\, h^{2r+1}}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(2r+1)h]}.$$

Particularizând și aci:

$$x = 2r+1,\quad h = -2,$$

găsim:

$$(3) \quad \Delta_{2r+1} f(x) = (-1)^{2r+1} \frac{2.4.6\ldots 2r.2^{2r+1}}{1.3.5\ldots 2r+1}.$$

Egalând valorile (2) și (3) și simplificând cu $(-1)^r 2$, avem:

$$C_{2r+1}^r - \frac{C_{2r+1}^{r-1}}{3} + \ldots + (-1)^{r-1} \frac{C_{2r+1}^1}{2r-1} +$$

$$(-1)^r \frac{1}{2r+1} = 2^{2r} \frac{2.4.6\ldots 2r}{1.3.5\ldots(2r+1)},$$

adică, tocmai identitatea dată.

Soluții analoage date de d-nii: *Bey M. Gheorghe* (lic Buzești, Craiova), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București) și *Sobel Mircea* (lic. Buzești, Craiova).

Altă soluție dată de d-nii: *Dărmănescu I.* (lic. Buzești, Craiova) și *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara).

Dacă punem:

(1) $\cos\alpha + i \sin\alpha = u,\ \cos\alpha - i\sin\alpha = v,\quad i = \sqrt{-1}$

deducem:

$$2i \sin\alpha = u - v,$$

pe care ridicând-o la puterea $2r+1$, avem:

$$(2) \quad 2^{2r+1} i^{2r+1} \sin^{2r+1}\alpha = (u-v)^{2r+1} =$$

$$u^{2r+1} - C_{2r+1}^1 u^{2r} v + \ldots - v^{2r+1} =$$

$$u^{2r+1} - v^{2r+1} - C_{2r+1}^1 uv(u^{2r-1} - v^{2r-1}) +$$

$$C_{2r+1}^2 u^2 v^2 (u^{2r-3} - v^{2r-3}) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r C_{2r+1}^r u^r v^r (u - v).$$

Cum din (1), deducem uşor:

$$u\,v = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \quad u^k - v^k = 2\,i \sin k\,a,$$

rezultă că (2) devine, simplificând cu $2i$:

$$(-1)^r\,2^{2r}\sin^{2r+1}\alpha = \sin(2r+1)\alpha - C^1_{2r+1}\sin(2r-1)\alpha + \ldots + (-1)^r C^r_{2r+1}\sin\alpha.$$

Inmulţind cu $d\alpha$ şi integrând dela 0 la $\frac{\pi}{2}$ avem:

$$(-1)^r\,2^{2r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r+1}\alpha\,d\alpha = \frac{1}{2r+1} - C^1_{2r+1}\frac{1}{2r-1} + \ldots + (-1)^r C^r_{2r+1}.$$

Inmulţind cu $(-1)^r$, deducem încă:

$$(3)\quad 2^{2r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r+1}\alpha\,d\alpha = C^r_{2r+1} - \frac{C^{r-1}_{2r+1}}{3} + \ldots + (-1)^{r-1}\frac{C^1_{2r+1}}{2r-1} + (-1)^r\frac{1}{2r+1}.$$

Integrala din primul membru se poate calcula însă şi prin părţi, avem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r+1}\alpha\,d\alpha = (-\sin^{2r}\alpha\cos\alpha)_0^{\frac{\pi}{2}} + 2r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r-1}\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha = 2r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r-1}\alpha - 2r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r+1}\alpha\,d\alpha.$$

De aci deducem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r+1}\alpha\,d\alpha = \frac{2r}{2r+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r-1}\alpha\,d\alpha.$$

Pentru $r = 1, 2, \ldots r$, găsim:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\alpha\,d\alpha = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\alpha\,d\alpha = \frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\alpha\,d\alpha = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}$$

. . . . . .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2r+1}\alpha\,d\alpha = \frac{2.4\ldots 2r}{3.5\ldots 2r+1}.$$

Inlocuind în (3) această valoare, obţinem:

$$C_{2r+1}^r - \frac{C^{r-1}_{2r+1}}{3} + \ldots + (-1)^{r-1}\frac{C^1_{2r+1}}{2r-1} + (-1)^r\frac{1}{2r+1} = 2^{2r}\frac{2.4.6\ldots 2r}{1.3.5\ldots(2r+1)}.$$

adică, identitatea cerută.

Alte soluţii date de d-nii: *Ionescu Th. Bujor Andrei* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti) şi *Nestor D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti).

512. — *Să se găsească cea mai generală valoare a numărului întreg* N, *ştiind că sumele* $337\,N + 243$, $273\,N + 51$, $225\,N - 93$ *şi* $189\,N - 201$ *sunt simultan divizibile cu* 2^{10}.

COL. GH. BUICLIU

De oarece:

$$2^{10} = 1024,$$

urmează că:

$$337\,N + 243 = 1024\,x$$

$$\therefore\quad 337\,N + 337 = 3.337\,x + 13\,x + 94.$$

Pentru ca N şi x să fie întregi trebue ca:

$$13\,x + 94 = 337\,h$$

$$\therefore\ 13\,x + 13.7 + 3 = 13.25\,h + 12\,h$$

$$\therefore\ 12\,h - 3 = 13\,m \quad \therefore\ 12\,h = 12\,m + m + 3$$

$$m + 3 = 12\,t \quad \therefore\ m = 12\,t - 3.$$

Inlocuind acum, în sens invers, pe m, h, x în funcţie de t se găseşte că forma cea mai generală a lui N pentru care prima sumă este divizibilă prin 2^{10} este:

$$(1)\qquad N = 1024\,t - 259,$$

unde t este un întreg oarecare.

Procedând absolut la fel cu celelalte trei sume, se găseşte tot soluţia (1).

Observ că:

$$269 + 765 = 1024,$$

şi că deci, dacă la membrul al 2-lea soluţiei (1) se adaugă sau se scade 765, atunci (1) se poate pune sub forma:

$$(2)\qquad N = 1024\,\theta + 765.$$

Soluţia problemei este deci forma (1) sau (2).

Forma (1) dă cea mai mare soluţie negativă pentru $\theta = 0$, iar forma (2) pentru $\theta = -1$; cea mai mică soluţie pozitivă e dată de (1) pentru $t = 1$ şi de (2) pentru $\theta = 0$.

1. A rezolvat bine problema pe această cale, d-l *Podariu A.* (lic. P.-Meamţ).

2. Au dat o bună soluţie cu ajutorul fracţiilor continue d-nii: *Ackermann C.* şi *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti).

540. — *Se cere patratul perfect de patru cifre $abcd$ astfel ca ca şi db se fie patrate perfecte.*

I TH POPOVICI

Numărul ca poate fi unul din şirul:

(1) $ca = 01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81,$

iar db unul din numerele aceluiaşi şir, mai puţin 25, 36 şi 81, căci $abcd$ fiind patrat perfect, d nu poate fi 2, 3 sau 8 Deci:

(2) $db = 01, 04, 09, 16, 49, 64.$

Asociind fiecare număr din şirul (1) cu toate numerele şirului (2) se formează 54 de numere $abcd$. Din acestea eliminăm pe acelea care nu au ultimele 2 cifre de terminaţie a unui patrat perfect, şi găsim că $abcd$ trebue căutat între numerele:

1601, 4601, 9904, 5924. 4661

1904, 4904, 9406, 6436, 4964

1406, 4406, 6419, 9641, 1681

4900, 9601, 5621, 9944, 1984

1486.

Din aceste numere eliminăm pe acele perechi care nu se divid cu 4 şi pe acelea care se divid cu 3 dar nu se divid cu 9. Restul numerelor le descompunem în factori şi găsim că singurele patrate perfecte sunt:

$$4900 = 70^2 \quad \text{şi} \quad 1681 = 41^2.$$

Acestea răspund enunţului cu convenţia de a considera pe 09 şi 04 ca numere de 2 cifre.

1. Au găsit ambele soluţiuni 4900 şi 1681, d-nii: *Bârs P., Dăciulescu Gr. V., Diaconescu V. T., Gataianţu B., Gheorghiu T. Gh., Haim F. L., Iliescu T. Th., Novacu V., Roman I. I., Scripcă M., Stoica N. A.* şi *Vasilescu B.*

2. Au găsit numai soluţia 1681, d-şoarele: *Dumitrescu Natalia şi Gheorghiu Silvia* (absolvente Şc. Normală, Bucureşti), *Frăsineanu Marioara* (lic. de fete, Caracal) şi d-nii: *Ackerman C. Albeaţă N. E., Angelescu N. N., Avramescu T. I., Băcanu V. I., Baciu G. T., Bădescu I. A., Bălăşescu N. C., Boruch C., Călin M. Gh., Carabeţeanu Gh. P., Căzămir A. I., Cercel Ş. C., Costăchescu V. C., Crăciunescu N. E., Craiu N. I., Curcubată D., Dănciulescu G. V., Diaconu C. O., Diminescu G., Dimitriu A. I., Dordea H., Drăgan G., Dumitrescu I. E., Fajon A., Fericeanu St., Florea Gh., Frănkel F., Frumuşeanu H. G., Ganea V., Georgescu S. G., Gheorghe M., Grant C. E., Grofşoreanu I. Gh., Iovănescu D., Lateş I., Manolescu I. N., Mătăsaru Tr.. Mocuţa Tr., Müller C. Gh., Muster H. D., Neacşu V., Nicolau A. V., Pantazi M. A, Panţu Z. I., Pârvu A., Pavel H. N., Podariu A., Popescu N. C., Procopiescu N., Săcăroiu D., Sasu V. I., Scarlat V. D., Segârceanu C. C., Şeimulescu I., Sprinceană C Gh., Stan I. A., Stănescu M. T., Şteblea St. St., Stoicescu Th., Ţanovici V. C, Ţari N. Gh., Ungureanu D. Ch., Vâlceanu N. I., Zagaican I., Zaharia C, Zaharia O. I., Zaharia O. N.* şi *Zamfirescu Gh. I.*

3. Au găsit numai soluţia 4900, d-nii: *Duport G., Grigore I.* şi *Isăcescu T.*

4. Un corespondent din T.-Severin a găsit că *unica soluţie a problemei este 1684!*

Au mai trimes soluţii, d-nii: *Aldea Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petre* (llc. Caransebeş) *Baciu G. Teodor* (lic. R.-Sărat), *Bolgar V. D-tru* (lic. Oltenita), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti) şi *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita).

789. — *Fie* M *un punct in planul unui triunghiu* ABC. *Se cere să se găsească viciul următoarei demonstraţiuni:*

„Din triunghiurile AMC *şi* ABC *se deduce:*

(1) $AC - MC < AM$

(2) $AC - AB < BC.$

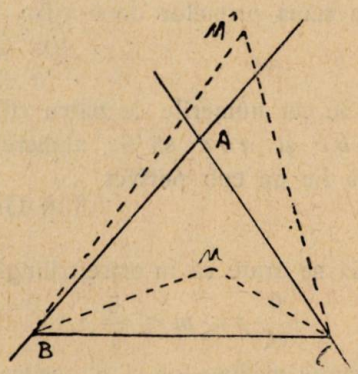
Scăzând aceste neegalităţi membru din membru se găseşte:

(3) $AB - MB < AM - BC,$

de unde rezultă:

(4) $AB + BC < AM + MC.$"

COL. GH. BUICLIU.



Mai întâi observăm că neegalitatea (4) este evident neadevărată atunci când M este în interiorul

triunghiului, căci conturul A B C înconjură conturul A M C. Aceiaşi neegalitate este însă cu siguranţă adevărată, pentru un motiv analog, când M se află în unghiul opus la creştet lui A B C.

Rezultă că în demonstraţie este o eroare, de natură algebrică. Eroarea este că pe de o parte sau efectuat operaţii aritmetice de adunare şi scădere cu neegalităţi între numere algebrice, iar pe de altă parte că a scădea pe (2) înseamnă a o înmulţi cu -1, deci a-i schimba senzul, ori din:

$$a > b \quad \text{şi} \quad c < d,$$

nu se poate deduce relaţia de mărime între $a+c$ şi $b+d$ decât în cazul când acestea sunt numere aritmetice. Din $8>5$ şi $6>1$ se vede că $8+5>5+1$, dar că $8-6<5-1$, pe când din $8>5$ şi $3>2$ se deduce atât $8+3>5+2$ cât şi $8-3>5-2$.

Viciul demonstraţiei constă deci în scăderea neegalităţilor (1) şi (2) una din alta şi darea sensului mărimei diferenţelor rezultate, înainte de a fi comparat întâi între ele, în toate cazurile posibile acele diferenţe.

Au găsit viciul de demonstraţie în mod original, d-nii: *Brotmann I.* (Bucureşti), *Carp I. I.* (Chişinău), *Chirilă G. I., Cuciureanu St.* (Şc. Milit., Iaşi), *Drăguţ Gh. V.* (Târgovişte), *Ghişoiu I. P.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu-Ţiu D. C.* (Şc. Milit. de geniu, Bucureşti), *Negrea A. M.* (student, Bucureşti), *Radu A.* (lic. Milit., Iaşi), *Scarlat A.* (Şc. Normală, Constanţa), *Tutoveanu V.* (Roman) şi *Vâlceanu N. J.* (Tg.-Jiu).

A mai trimes soluţii, d-nii: *Aldea N.* (lic. M-rea Dealu).

PROBLEME PROPUSE

834. — Să se găsească patratul de forma $abcba$ unde c este suma primelor două cifre.

ION C. SAVIN

835. — Se cer numerile de patru cifre $abcd$, astfel ca abc şi abd să fie numere prime şi $ad-ab$ să fie un cub perfect.

ION GH. POPA

836. — Să se arate că în orice triunghiu, avem;

$$\frac{9}{14}p < m < \frac{5}{4}p,$$

unde m e suma medianelor şi p perimetrul triunghiului.

ION MARGINEANU

837. — Fie E_a, E_b, E_c punctele lui *Euler* ale unui triunghiu A B C şi A_1, B_1, C_1 punctele unde înălţimele taie cerul circumscris acestui triunghiu. Dreptele A_1E_b, A_1E_c, determină pe latura B C punctele A_b şi A_c. Analog se obţin punctele B_c şi B_a, C_a şi C_b. Se cere suprafaţa poligonului:

$$A_b\,A_c\,E_e\,B_c\,B_a\,E_a\,C_a\,C_b\,E_b,$$

cunoscând suprafaţa triunghiului A B C.

JUSTIN N. VALCEANU

838. — Să se demonstreze că oricare ar fi relaţiunea de mărime între cantităţile reale, pozitive sau negative, a, b, a', b', între aceste cantităţi există inegalitatea;

$$\frac{\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2}+\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}}{2} < \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2}.$$

COL. GH. BUICLIU

839. — Se dau ecuaţiile:

$$x^2+px+q=0$$
$$y^2-(p^2-2q)y+q^2=0.$$

Să se arate că rădăcinele primei ecuaţii se pot obţine extrăgând rădăcina patrată din rădăcinele ecuaţiei a doua.

V. ALACI

840. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(x-kr)+\sin x+\sum_{k=1}^{n}\sin(x+kr)=a.$$

C-TIN V. COSTACHESCU

841. — Intre elementele unui triunghiu oarecare, avem relaţiile:

$$\sum\frac{a^2-b^2}{\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}}=16R(R+r)$$

$$\sum\frac{a^2-b^2}{\cos^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{B}{2}}=-16R(R+r).$$

CEZAR COSNITA

INFORMAȚIUNI

Recomandăm călduros corespondenților noștri, cartea „*Gândirea Matematică*“ a d-lui profesor universitar *Petre Sergescu*, premiată de *Academia Română*.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul VIII, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 SEPTEMBRIE 1929 No. 7

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. P. SERGESCU. O APLICATIE A UNEI TEOREME ELEMENTARE DE GEOMETRIE.
2. COL. Gh. BUICLIU. PROBLEMA NUCILOR.
3. NOTE MATEMATICE, 17, 18, 19.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 464, 526, 549, 790, 809.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța că mai face parte dintre membrii „Revistei Matematice“ și d-l **Ernest Csilcser,** profesor la Liceul Diaconovici-Loga, Timișoara IV, Str. Ion Ghica 16.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** — profesor Școala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Prof. **C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat, 100 lei.
Anul III, broșat, 100 lei.
Anul IV, broșat, 100 lei.
Anul V, broșat, 100 lei.
Anul VI, broșat, 100 lei.
Anul VII, broșat, 100 lei.
Anul VIII, broșat, 100 lei.

ANUL IX — NO. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1929

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

O APLICAȚIE A UNEI TEOREME ELEMENTARE DE GEOMETRIE

de P. SERGESCU

Se știe că funcțiunea:

$$Z = f(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \qquad |a| = k < 1$$

(unde $\bar{a}$ e cătimea imaginar conjugată lui a) transformă conform cercul $|z| = 1$ în cercul $|Z| = 1$, astfel că centrul cercului transformat corespunde punctului $z = a$. In baza proprietăților reprezentărei conforme rezultă imediat că $|Z| < 1$, pentru $|z| < 1$. Vreau să arăt acest lucru pe o cale absolut elementară.

Teoremă. *In trapezul* A B C D *în care baza mare e* A B *și în care* A D > B C, *diagonala* A C *e mai mare ca diagonala* B D.

Fie D′ și C′ proecțiile lui D și C pe A B. De oarece A D > B C, rezultă că A D′ > B C′, deci și A C′ > B D′. Or C C′ = D D′. Prin urmare:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AC'}^2 + \overline{CC'}^2 \quad \overline{BD'}^2 + \overline{DD'}^2 = \overline{BD}^2$$

$$AC > BD.$$

Să aplicăm această teoremă. Se presupunem $|z| \leq |a|$. Atunci, punând $\frac{z}{a} = \sigma$, avem $|\sigma| \leq 1$; și ținând seama de $a\bar{a} = k^2$, avem:

$$|Z| = \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = |a| \left|\frac{\sigma-1}{1-\bar{a}z}\right| = \left|\frac{1-\sigma}{\frac{1}{k}-k\sigma}\right|.$$

Dar punctele 1, $\frac{1}{k}$, σ și $k\sigma$ formează un trapez, căci:

$$\frac{1}{\frac{1}{k}} = \frac{k\sigma}{\sigma}.$$

Cum $k|\sigma| < 1$, rezultă că segmentul 1, $\frac{1}{k}$ e mai mare decât segmentul $k\sigma$, σ. In baza teoremei precedente, rezultă că diagonala care unește punctele $\frac{1}{k}$, $k\sigma$ e mai mare ca aceea care unește punctele 1, σ. Cu alte cuvinte:

$$\left|\frac{1}{k} - k\sigma\right| > |1-\sigma|,$$

ceeace dă:

$$|Z| < 1.$$

Proprietatea e stabilită pentru $|z| \leq |a|$. In cazul când $|a| \leq |z| < 1$, observăm că a și z joacă un rol analog, căci:

$$|Z| = \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = \left|\frac{a-z}{1-\bar{z}a}\right|.$$

Deci proprietatea subsistă și în acest caz.

PROBLEMA NUCILOR

de COL GH. BUICLIU

Numesc astfel problema 508 propusă de d-l *V. Vâlcovici* și rezolvată în *Revista Matematică din Timișoara,* vol. IX, la pag. 55. Enunțul acelei probleme este:

Patru persoane A, B, C *și* D, *își împart un sac cu nuci, în felul următor: Prima persoană* A *aruncă o nucă pentru a-și putea lua a patra parte, un număr întreg de nuci; a doua* B *procedează la fel cu restul din sac, apoi a treia* C *cu ceeace rămâne după* B *și în fine a patra* D *cu ceeace rămâne după* C. *Restul de nuci se împarte exact în patru părți egale, celor 4 persoane. Câte nuci au fost în sac?*

Imi propun să generalizez această problemă în felul următor:

Un sac de nuci este împărțit între p persoane $A_1, A_2, \ldots A_p$ *în modul următor:* A_1 *aruncă din sac* a_1 *nuci și din rest ia* $\frac{1}{n_1}$, *apoi* A_2 *aruncă* a_2 *din ce rămâne în sac dela* A_1 *și din rest ia* $\frac{1}{n_2}$. *Din ce rămâne,* A_3 *aruncă* a_3 *nuci iar din rest ia* $\frac{1}{n_3}$ *și așa mai departe. Nucile aruncate din sac plus ceiace a rămas în sac după ce și-a luat* A_p *partea lui, se împart în* n_p *părți egale la fiecare din cele p persoane. Se întreabă câte nuci primește fiecare din cele p persoane și câte nuci au fost la început în sac.*

Rezolv această problemă exact după metoda pe care am dat-o în articolul *Probleme identice* publicat la pagina 61 și următoarele:

Insemn cu $A_1, A_2, \ldots A_p$ nucile pe care le ia fiecare din cele p persoane.

Fie x numărul de nuci aflate în sac. A_1 aruncă a_1 nuci, deci rămân în sac $x - a_1$ nuci, din care:

(1) $$A_1 \text{ ia } \ldots \frac{x - a_1}{n_1}.$$

In sac vor rămâne acum:

$$R_1 = x - a_1 - \frac{x - a_2}{n_1} = \frac{(n_1 - 1)x - (n_1 - 1)a_1}{n_1}$$

$$= \frac{(n_1 - 1)(x - a_1)}{n_1}.$$

Din acestea, A_2 aruncă a_2 nuci, rămân în sac:

(2) $$R_1 - a_2 = \frac{(n_1 - 1)x - (n_1 - 1)a_1 - n_1 a_2}{n_1}.$$

Acum A_2 ia $\frac{1}{n_2}$ din rest, adică:

(3) $$\frac{(n_1 - 1)x - (n_1 - 1)a_1 - n_1 a_2}{n_1 n_2}.$$

In sac vor rămâne:

$$R_2 = (2) - (3) =$$

$$\frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)x - (n_1 - 1)(n_2 - 1)a_1 - n_1(n_2 - 1)a_2}{n_1 n_2}$$

A_3 aruncă a_3 din R_2 și rămân în sac:

(4) $$\frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)x - (n_1 - 1)(n_2 - 1)a_1 - n_1(n_2 - 1)a_2 - n_1 n_2 a_3}{n_1 n_2}.$$

Din acestea A_3 ia:

(5) $$\frac{(n_1 - 1)(n_1 - 2)x - (n_1 - 1)(n_2 - 1)a_1 - n_1(n_2 - 1)a_2 - n_1 n_2 a_3}{n_1 n_2 n_3}.$$

In sac vor rămâne:

$$R_3 = (4) - (5) = \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)x - (n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)a_1 - n_1(n_2 - 1)(n_3 - 1)a_2 - n_1 n_2 (n_3 - 1)a_3}{n_1 n_2 n_3}$$

$$\therefore R_3 = \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)(x - a_1) - n_1(n_2 - 1)(n_3 - 1)a_2 - n_1 n_2 (n_3 - 1)a_3}{n_1 n_2 n_3}.$$

A_4 aruncă a_4 din aceste R_3 nuci. Rămân:

(5) $$\frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)(x - a_1) - n_1(n_2 - 1)(n_3 - 1)a_2 - n_1 n_2 (n_3 - 1)a_3 - n_1 n_2 n_3 a_4}{n_1 n_2 n_3}.$$

Din (5), A_4 ia:

(6) $$\frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)(x - a_1) - n_1(n_2 - 1)(n_3 - 1)a_2 - n_1 n_2 (n_3 - 1)a_3 - n_1 n_2 n_3 a_4}{n_1 n_2 n_3 n_4},$$

iar în sac vor rămâne:

$$R_4 = (5) - (6) =$$

$$\frac{(n_1 - 1)(n_2 - 1)(n_3 - 1)(n_4 - 1)(x - a_1) - n_1(n_2 - 1)(n_3 - 1)(n_4 - 1)a_2 - n_1 n_2 (n_3 - 1)(n_4 - 1)a_3 - n_1 n_2 n_2 (n_4 - 1)a_4}{n_1 n_2 n_3 n_4}$$

Cu acestea legea de formare a numerelor (1), (3), (5)... și R_1, $R_2 \ldots R_p$ este perfect stabilită, numerele deducându-se ușor unele din altele.

Pentru prescurtare voi nota:

$$P_a^b = n_1 n_2 \ldots n_a (n_{a+1} - 1)(n_{a+2} - 1) \ldots$$
$$\ldots (n_{b-1} - 1)(n_b - 1),$$

în care:

$$a < b; \quad n_0 = 1 \quad \text{și} \quad P_0^0 = 1.$$

Cu această notație rezultatele de până acum se pot scrie după cum urmează:

(1) $$A_1 \text{ ia} \ldots \frac{P_0^0 (x - a_1)}{n_1}$$

$$R_1 = \frac{P_0^1 (x - a_1)}{n_1}$$

(3) $$A_2 \text{ ia} \ldots \frac{P_0^1 (x - a_1) - n_1 a_2}{n_1 n_2}$$

$$R_2 = \frac{P_0^2 (x - a_1) - P_1^2 a_2}{n_1 n_2}$$

(5) $$A_3 \text{ ia} \ldots \frac{P_0^2 (x - a_1) - P_1^2 a_2 - n_1 n_2 a_3}{n_1 n_2 n_3}$$

$$R_3 = \frac{P_0^3 (x - a_1) - P_1^3 n_1 - P_2^3 n_3}{n_1 n_2 n_3}$$

(6) $$A_4 \text{ ia} \ldots \frac{P_0^3 (x - a_1) - P_1^3 a_2 - P_2^3 a_3 - n_1 n_2 n_3 a_4}{n_1 n_2 n_3 n_4}$$

$$R_2 = \frac{P_0^4 (x - a_1) - P_1^4 a_2 - P_2^4 a_3 - P_3^4 a_4}{n_1 n_2 n_3 n_4}$$

și în fine:

(7) $$A_p \text{ ia} \ldots \frac{P_0^{p-1} (x - a_1) - P_1^{p-1} a_2 - P_2^{p-1} a_3 \ldots - P_{p-2}^{p-1} a_{p-1} - n_1 n_2 \ldots n_{p-1} a_p}{n_1 n_2 \ldots n}.$$

După aceste distribuții au mai rămas în sac:

$$R_p =$$
$$\frac{P_0^p (x - a_1) - P_1^p a_2 - P_2^p a_3 \ldots - P_{p-2}^p a_{p-1} - P_{p-1}^p a_p.}{n_1 n_2 \ldots n_p}$$

Pe lângă aceste R_p nuci nedistribuite, au mai rămas de împărțit cele:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p = \sum_1^p a_i$$

nuci, aruncate la fiecare împărțeală. Fiecare din cele p persoane va mai avea deci de primit, conform enunțului:

$$B = \frac{1}{n_p} \left[\sum_1^p a_i + R_p \right].$$

In definitiv fiecare persoană va avea de primit respectiv cantitățile:

$A_1 = (1) + B$; $A_2 = (2) + B$; ... $A_p = (7) + B$,

în care (1), (2)... reprezintă numărul scris mai înainte în dreptul acestor paranteze. Rămâne acum să se determine x astfel ca numerele A_1, $A_2 \ldots A_p$ să fie întregi.

Problema astfel generalizată este o sursă bogată în chestiuni analoage cu problema 508 și cu problema 512.

Problema 508 a d-lui *V. Vâlcovici* corespunde cazului particular:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1; \quad p = n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4.$$

O problemă particulară interesantă este și aceia în care:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_p = a$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_p = p.$$

In acest caz avem restul remarcabil:

$$R_p = \frac{(p-1)^p (x - a) - [p (p-1)^{p-1} + p^2 (p-1)^{p-2} + \ldots + p^{p-1} (p-1)] a}{p^p}$$

din care se deduc ușor valorile lui A_1, $A_2, \ldots A_p$.

Dificultatea mare în cazul general, este de a găsi pe x așa că A_1, $A_2, \ldots A_p$ să fie numere întregi.

NOTE MATEMATICE

17. *Identitatea lui Lagrange, generalizată.*
Se cunoaşte clasica identitate „a lui *Lagrange*“ :

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2\equiv (ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2.$$

In lucrările matematice cercetate de mine până acum, n'am găsit o generalizare a ei; o neînsemnată încercare în această direcţie se găseşte în „Culegere de probleme de algebră“ de *A. G. Ioachimescu,* unde (vezi ed. III-a, pag. 3) se stabileşte identitatea :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)-(ax+by+cz+dt)^2\equiv(ay-bx+ct-dz)^2+(az-cx+dy-bt)^2+(at-dx+bz-cy)^2.$$

Să remarcăm că, pentru $c=z=0$, identitatea lui *Lagrange* devine :

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2\equiv(bx-ay)^2.$$

Apoi :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)-(ax+by+cz+dt)^2\equiv(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(at-dx)^2+(bz-cy)^2+(bt-dy)^2+(ct-dz)^2.$$

In adevăr :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)-(ax+by+cz+dt)^2=a^2y^2+a^2z^2+a^2t^2+b^2x^2+b^2z^2+b^2t^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2t^2+d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-2abxy-2acxz-2adxt-2bcyz-2bdyt-2cdzt=$$

$$(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(at-dx)^2+(bz-cy)^2+(bt-dy)^2+(ct-dz)^2=a^2y^2-2abxy+b^2x^2+a^2z^2-2acxz+c^2x^2+a^2t^2-2adxt+d^2x^2+b^2z^2-2bcyz+c^2y^2+b^2t^2-2bdyt+d^2y^2+c^2t^2-2cdzt+d^2z^2,$$

şi, astfel, identitatea se verifică uşor.

Forma remarcabilă a acestor identităţi ne conduce la stabilirea identităţei generale :

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2)-(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n)^2\equiv$$

$$(a_1x_2-a_2x_1)^2+(a_1x_3-a_3x_1)^2+(a_1x_4-a_4x_1)^2+\ldots+(a_2x_3-a_3x_2)^2+(a_2x_4-a_4x_2)^2+\ldots+(a_kx_{k-1}-a_{k+1}x_k)^2+(a_kx_{k+2}-a_{k+2}x_k)^2+\ldots+(a_{n-1}x_a-a_nx_{n-1})^2.$$

In adevăr :

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k-1}^{n}a_i^2x_k^2\right)$$

şi :

$$(a_1x_1+a_2x_2+\ldots a_nx_n)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2x_k^2+2\sum a_1a_2x_1x_2$$

Apoi :

$$\sum(a_1x_2-a_2x_1)^2=\sum(a_1^2x_2^2-2a_1a_2x_1x_2+a_2^2x_1^2)$$

Se verifică însă uşor că :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k+1}^{n}a_i^2x_k^2\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k^2x_k^2+\sum a_1^2x_2^2+\sum a_2^2x_1^2+2\sum a_1a_2x_1x_2-2\sum a_1a_2x_1x_2.$$

Q. E. D.

Acestea stabilite, să arătăm câteva aplicaţii ale identităţii *Lagrange,* generalizate.

Să calculăm minimul expresiei;

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2,$$

ştiind că x_1, x_2, $x_3,\ldots x_n$ *sunt variabile reale, legate prin relaţia :*

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n=a,$$

unde a_1, $a_2,\ldots a_n$ *şi* a *sunt constante.*

Din identitatea stabilită. deducem :

$$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=\frac{a}{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\frac{\sum(a_1x_2-a_2x_1)^2}{\sum_{1}^{n}a_k^2};$$

$\sum_{1}^{n}x_k^2$ este deci superior sau egal cu $\frac{a}{\sum_{1}^{n}a_k^2}$,

egalitatea ne putând să aibă loc decât când toate patratele de forma $(a_1x_2-a_2x_1)^2$ se anulează, aceasta se întâmplă când :

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}=$$

$$\frac{a_1x_1+a_2x_1+a_3x_3+\ldots+a_nx_n}{\sum_1^n a_k^2}=\frac{a}{\sum_1^n a_k^2}.$$

Deci, minimul absolut al expresiunei $\sum_1^n x_k^2$, egal cu $\frac{a}{\sum_1^n a_k^2}$ are loc când variabilele $x_1, x_2, \ldots x_n$ sunt respectiv proporționale cu cantitățile $a_1, a_2, \ldots a_n$.

In cazul particular $n=3$, regăsim problema 5999 din „l'Éducation mathématique", an. 31, No. 1, pag. 3.

Să calculăm acum maximul expresiunei:

$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots+x_ny_n,$$

când cunoaștem:

$$\sum_1^n x_k^2=A,\quad \sum_1^n y_k^2=B,$$

$x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ *fiind variabile reale.*

In virtutea identității stabilite, putem scrie:

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2=\left(\sum_1^n x_k^2\right)\left(\sum_1^n y_k^2\right)-$$

$$\Sigma(x_1y_2-x_2y_1)^2=A\,.\,B-\Sigma(x_1y_2-x_2y_1)^2;$$

$\left(\sum_1^n x_k\,y_k\right)^2$ este deci mai mic sau egal cu A . B, egalitatea neputând avea loc decât în cazul când patratele dinmembrul al 2-lea se anulează simultan. Aceasta se întâmplă când:

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=\ldots=\frac{x_n}{y_n}.$$

Maximul cerut este egal cu $\sqrt{A\,B}$

în cazul particular $n=2$, identitatea stabilită, devine:

$$(x^2+y^2)(z^2+t^2)-(xz+yt)^2\equiv(xt-yz)^2.$$

Dacă considerăm pe x, y, z, t variabile reale și punem:

$$x^2+y^2=A,\quad z^2+t^3=B,$$

putem găsi maximul expresiei $xt-yz$ și astfel dăm peste problema 800 din R. M. T.

In adevăr avem:

$$(xt-yz)^2=AB-(xz+yt)^2.$$

Maximul cerut, egal cu $\sqrt{A\,B}$, este atins când:

$$\frac{x}{y}=-\frac{t}{x}.$$

Identitatea lui *Lagrange* a fost mult întrebuințată în aplicații. O mare parte din acestea pot fi acum generalizate, după cele stabilite mai sus, dând rezultate interesante.

I. MURAROIU

18. *O generalizare.*

Imi propun să generalizez problema 521, R. M. T.. anul VI și anume să stabilesc identitatea:

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma\left[\frac{1}{a^{2\alpha}(b^\beta-a^\alpha)}+\frac{1}{b^{2\beta}(a^\alpha-b^\beta)}\right]-$$

$$\Sigma a^\alpha b^\beta\left[\frac{1}{a^\alpha(b^\beta-a^\alpha)}+\frac{1}{b^\beta(a^\alpha-b^\beta)}\right]=-1,$$

Insemnând cu E primul membru putem scrie succesiv:

$$E=\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{b^\beta-a^\alpha}\left(\frac{1}{a^{2\alpha}}-\frac{1}{b^{2\beta}}\right)-$$

$$\frac{a^\alpha b^\beta+b^\beta c^\gamma+c^\gamma a^\alpha}{b^\beta-a^\alpha}\left(\frac{1}{a^\alpha}-\frac{1}{b^\beta}\right)=$$

$$\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma(b^\beta-a^\alpha)(b^\beta+a^\alpha)}{a^{2\alpha}b^{2\beta}(b^\beta-a^\alpha)}-$$

$$\frac{(a^\alpha b^\beta+b^\beta c^\gamma+c^\gamma a^\alpha)(b^\beta-a^\alpha)}{a^\alpha b^\beta(b^\beta-a^\alpha)}=\frac{c^\gamma(b^\beta+a^\alpha)}{a^\alpha b^\beta}-$$

$$\frac{a^\alpha b^\beta+b^\beta c^\gamma+c^\gamma a^\alpha}{a^\alpha b^\beta}=-\frac{a^\alpha b^\beta}{a^\alpha b^\beta}=-1.$$

Identitatea este astfel stabilită.

In identitatea generalizată dacă facem $\alpha=\beta=\gamma=n$, avem:

$$a^n b^n c^n\left[\frac{1}{a^{2n}(b^n-a^n)}+\frac{1}{b^{2n}(a^n-b^n)}\right]-$$

$$(a^n b^n+b^n c^n+c^n a^n)\left[\frac{1}{a^n(b^n-a^n)}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{b^n(a^n-b^n)}\right]=-1,$$

sau dacă facem $a=\alpha.\ b=\beta,\ c=\gamma$, avem:

$$a^a b^b c^c \left[\frac{1}{a^{2a}(b^b - a^a)} + \frac{1}{b^{2b}(a^a - b^b)}\right] -$$

$$(a^a b^b + b^b c^c + c^c a^a)\left[\frac{1}{a^a(b^b - a^a)} + \frac{1}{b^b(a^a - b^b)}\right] = -1.$$

PETRE I. GHISOIU

19. *Asupra dreptei lui Euler.*

In cele ce urmează expun o nouă metodă, pentru calculul lungimei dreptei lui *Euler* a unui triunghiu. Fie deci triunghiul A B C înscris în cercul O, H ortocentrul iar A′ şi A_1 respectiv piciorul înălţimei şi medianei duse din A pe B C.

Figura $O A_1 H M_a$ (M_a este mijlocul lui A H) este evident un paralelogram; după o proprietate cunoscută avem:

$$(1) \qquad \overline{O H}^2 = 2(\overline{O A_1}^2 + \overline{H A_1}^2) - \overline{M_a A_1}^2.$$

Dar:

$$O A_1 = R \cos A, \quad M A_1 = R,$$

iar pentru $H A_1$ găsim uşor valoarea:

$$R\sqrt{2(\cos^2 B + \cos^2 C) - \sin^2 A}.$$

Relaţia (1) devine deci:

$$\overline{O H}^2 = R^2[2\cos^2 A + 4\cos^2 B + 4\cos^2 C - 2\sin^2 A - 1]$$

$$\overline{O H}^2 = R^2[4(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - 3].$$

Cum însă:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A \cos B \cos C,$$

relaţia precedentă devine:

$$\therefore \quad \overline{O H}^2 = R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C)$$

$$O H = R\sqrt{1 - 8\cos A \cos B \cos C}.$$

CEZAR COSNITA.

BIBLIOGRAFIE

1. Gazeta Matematică, vol. XXXIV, No. 12, August 1929. *Vasile Cristescu* (viaţa şi activitatea lui profesională), de de *I. Ionescu*. Proprietăţi importante ale triunghiului, de *N. Blaha*. Integrarea unei ecuaţii diferenţiale. Calculul unei clase de integrale. de *Th. Angheluţă*.

PROBLEME REZOLVATE

464. — *Pentruce valori întregi ale lui n, fracţiunea* $\frac{a}{5}$ *este cuprinsă între* $\sqrt{n}$ *şi* $\sqrt{n+1}$?

COL. GH. BUICLIU.

Trebue să avem:

$$\sqrt{n} < \frac{a}{5} < \sqrt{n+1}$$

$$(1) \qquad \therefore \quad n < \frac{a^2}{25} < n + 1,$$

unde a şi n sunt numere întregi şi pozitive, ceiace se subînţelege şi din enunţ.

a este nedivizibil prin 5 căci altfel problema nu ar mai cere nici un examen, $\frac{a^2}{25}$ ar fi un patrat perfect p^2, iar n ar fi $p^2 - 1$.

Considerăm deci $\frac{a}{5}$ ireductibil.

Neegalităţile (1) arată că n este câtul întreg cu aproximaţie de o unitate în minus al împărţirei lui a^2 prin 25. Totul se reduce deci la a găsi acest cât pentru diferitele valori ale lui a.

Faţă de divizorul 5, numărul a poate avea una din formele:

$$5m + 1, \quad 5m + 2, \quad 5m - 1, \quad 5m - 2.$$

Fie $a = 5m + 1$. In acest caz:

$$\frac{a^2}{25} = m^2 + \frac{2m}{5} + \frac{1}{25},$$

în care m poate fi dat de una din formele:

$$5p, \quad 5p + 1, \quad 5p + 2, \quad 5p - 1, \quad 5p - 2.$$

Dacă $m = 5p$ atunci:

$$\frac{a^2}{25} = 25p^2 + 2p + \frac{1}{25} \quad \text{şi} \quad n = 25p^2 + 2p.$$

Dând lui m şi celelalte valori se formează tabelul următor pentru $a = 5m + 1$.

m	a	$\frac{a^2}{25}$	n
$5p$	$25p + 1$	$25p^2 + 2p + \frac{1}{25}$	$25p^2 + 2p$
$5p + 1$	$25p + 6$	$25p^2 + 12p + 1 + \frac{11}{25}$	$25p^2 + 12p + 1$
$5p + 2$	$25p + 11$	$25p^2 + 22p + 4 + \frac{21}{25}$	$25p^2 + 22p + 4$
$5p - 1$	$25p - 4$	$25p^2 - 8p + \frac{16}{25}$	$25p^2 - 8p$
$5p - 2$	$25p - 9$	$25p^2 - 18p + 3 + \frac{6}{25}$	$25p^2 - 18p + 3$

Dacă $a = 5m + 2$ atunci:

$$\frac{a^2}{25} = m^2 + \frac{4m}{5} + \frac{4}{25},$$

de unde se construeşte analog următorul tabel:

m	a	$\frac{a^2}{25}$	n
$5p$	$25p+2$	$25p^2+4p+\frac{4}{25}$	$25p^2+4p$
$5p+1$	$25p+7$	$25p^2+14p+1+\frac{24}{25}$	$25p^2+14p+1$
$5p+2$	$25p+12$	$25p^2+24p+5+\frac{10}{25}$	$25p^2+24p+5$
$5p-1$	$25p-3$	$25p^2-6p+\frac{9}{25}$	$25p^2-6p$
$5p-2$	$25p-8$	$25p^2-16p+2+\frac{14}{25}$	$25p^2-16p+2$

Fie $a = 5m - 1$:

$$\therefore \frac{a^2}{25} = m^2 - \frac{2m}{5} + \frac{1}{25},$$

de unde tabelul:

m	a	$\frac{a^2}{25}$	n
$5p$	$25p-1$	$25p^2-2p+\frac{1}{25}$	$25p^2-2p$
$5p+1$	$25p+4$	$25p^2+8p+\frac{16}{25}$	$25p^2+8p$
$5p+2$	$25p+9$	$25p^2+18p+3+\frac{6}{25}$	$25p^2+18p+3$
$5p-1$	$25p-6$	$25p^2-12p+1+\frac{11}{25}$	$25p^2-12p+1$
$5p-2$	$25p-11$	$25p^2-22p+4+\frac{21}{25}$	$25p^2-22p+4$

In fine pentru $a = 5m - 2$ avem:

$$\frac{a^2}{25} = m^2 - \frac{4m}{5} + \frac{4}{25},$$

de unde:

m	a	$\frac{a^2}{25}$	n
$5p$	$25p-2$	$25p^2-4p+\frac{4}{25}$	$25p^2-4p$
$5p+1$	$25p+3$	$25p^2+6p+\frac{9}{25}$	$25p^2+6p$
$5p+2$	$25p+8$	$25p^2+16p+2+\frac{14}{25}$	$25p^2+16p+2$
$5p-1$	$25p-7$	$25p^2-14p+1+\frac{24}{25}$	$25p^2-14p+1$
$5p-2$	$25p-12$	$25p^2-24p+5+\frac{19}{25}$	$25p^2-24p+5$

Asociind în mod convenabil valorile lui n şi a din aceste tablouri se găseşte că problema admite următoarele 20 de sisteme de soluţiuni în care semnele se corespund:

a	n	a	n
$25p \pm 1$	$25p^2 \pm 2p$	$25p \pm 2$	$25p^2 \pm 4p$
$25p \pm 6$	$25p^2 \pm 12p+1$	$25p \pm 7$	$25p^2 \pm 14p+1$
$25p \pm 11$	$25p^2 \pm 22p^2+4$	$25p \pm 12$	$25p^2 \pm 24p+5$
$25p \pm 4$	$25p^2 \pm 8p$	$25p \pm 3$	$25p^2 \pm 6p$
$25p \pm 9$	$25p^2 \pm 18p+3$	$25p \pm 8$	$25p^2 \pm 16p+2$

Problema nu a fost rezolvată de nici un corespondent deşi sau primit aşa zise soluţii dela 28 corespondenţi. Se constată că se fac puţine exerciţii cu neegalităţile şi că în general se comit erori nepermise în raţionamentele pe care le fac corespondenţii asupra neegalităţilor. Numai aşa se explică cum de s'au găsit printre cele 28 de soluţii rezultate ca:

$$\frac{5}{2}(5-\sqrt{29}) < n < \frac{5}{2}(5+\sqrt{29})$$

sau:

$$\frac{a^2}{25} - 1 < n < \frac{a^2}{25},$$

sau altele tot atât de eronate.

526. — *Să se găsească patratele perfecte de şase cifre, aşa încât atât numărul format de primele trei cifre, cât şi cel format de ultimele trei cifre să fie patrate perfecte.*

GH. CONSTANTINESCU

Fie N^2 numărul căutat. Patratele perfecte de 3 cifre sunt următoarele 22 numere:

100 256 484 729
121 289 529 784
144 324 576 841
169 361 625 900
196 400 676 961
225 441.

N^2 va începe cu unul din aceste 22 numere şi se va termina cu unul din ele.

Presupun că începe cu 100, atunci N^2 ar putea fi minimum 100000 considerând că ultimul număr poate fi patrat de 3, 2 sau 1 cifră, şi maximum 100961, adică:

(1) $100000 \leq N^2 \leq 100961$

$\therefore \quad 316 \leq N \leq 318.$

Ridicând la patrat pe 316, 317 şi 318 obţinem numere care nu răspund problemei.

Din acest caz se deduce calea de urmat, aşa că rezumăm după cum urmează restul încercărilor:

(2) $121000 \leq N^2 \leq 121961$

$347 \leq N \leq 350,$ nici o soluţie

(3) $144000 \leq N^2 \leq 144961 \quad \therefore \quad 379 \leq N \leq 381.$

Avem soluţia:

$N^2 = 144400 = 12^2 \times 1000 + 20^2$

(4) $169000 \leq N^2 \leq 169961,$ nici o soluţie

(5) $196000 \leq N^2 \leq 196961,$ nici o soluţie

(6) $225000 \leq N^2 \leq 225961$

găsim soluţia:

$N^2 = 225625 \leq 15^2 \times 1000 + 25^2$

(7) $256000 \leq N^2 \leq 256961,$

găsim soluţia:

$N^2 = 256036 = 16^2 \times 1000 + 6^2$

(8) $289000 \leq N^2 \leq 289961,$ nici o soluţie

(9) $324000 \leq N^2 \leq 384961,$

găsim soluţia:

$N^2 = 324900 = 18^2 \times 1000 + 30^2$

(10) $361000 \leq N^2 \leq 361961,$ nici o soluţie

(11) $400000 \leq N^2 \leq 400961,$ „ „

(12) $441000 \leq N^2 \leq 441961,$ „ „

(13) $484000 \leq N^2 \leq 484961,$ „ „

(14) $529000 \leq N^2 \leq 529961,$ „ „

(15) $576000 \leq N^2 \leq 576961.$

Soluţia:

$N^2 = 576081 = 24^2 \times 1000 + 9^2$

(16) $625000 \leq N^2 \leq 625961,$ nici o soluţie

(17) $676000 \leq N^2 \leq 676961.$ „ „

(18) $729000 \leq N^2 \leq 729961.$ „ „

(19) $784000 \leq N^2 \leq 784961.$ „ „

(20) $841000 \leq N^2 \leq 841961.$ „ „

(21) $900000 \leq N^2 \leq 900961,$ „ „

(22) $961000 \leq N^2 \leq 961961.$ „ „

Următoarele 5 patrate răspund problemei:

$380^2 = 144400, \quad 475^2 = 225625, \quad 506^2 = 256036,$

$570^2 = 324900, \quad 759^2 = 576081.$

Dacă se dispune de o tablă de patrate, atunci stabilirea celor 22 de inegalităţi face să se găsească cu foarte maré uşurinţă soluţiile problemei.

Observaţiuni. 1. Soluţia problemei este redijată după soluţia trimisă de d-l *Sprinceană Gh.* (lic. Galaţi).

2. D-l *Dănciulescu V. Gr.* (lic. Craiova) a găsit exact cele 5 soluţii rezolvind în numere întregi de câte 3 cifre, ecuaţia:

$$1000\,x^2 + y^2 = N^2.$$

Soluţia d-sale este prea greoaie pentru a o publica. Soluţia generală a acestei ecuaţii ese din cadrul materiei pe care o trateaze R. M. T.

3. Au dat toate soluţiile d-ra *Dobrescu C. Ana* (Bucureşti) şi d-nii: *Ackerman C.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Arsene Alexandru* (lic. Milit., Iaşi), *Bivolariu C. V.* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Carabeţeanu Gh. P.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Cercel St. C.* (lic. Târgovişte), *Franţiu I.* (an preparator, Şc. Polit. Timişoara), *Ghişoiu Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Grofşorean I. Gh.* (Şc. Polit., Timişoara), *Gheorghiu T. Gh.* (lic. Galaţi), *Mătăsaru C. T.*, *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Popescu C. V.* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Roman I. I.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Sasu I.* (lic. Milit., Tg.-Mureş) şi *Savin C. Ion* (lic. lic. Milit., Iaşi).

4. Au dat numai soluţiile 144400, 225625 şi 324900 d-nii: *Almăjan Petru* (lic. Caransebeş), *Baciu G. Teodor* (R.-Sărat), *Beşchea N.* (lic. Braşov), *Diminescu G.*, *Drăgan G.* (lic. Braşov), *Georgescu S. Gh* (Şc. Polit., Bucureşti), *Iovănescu F.* (lic. Craiova), *Popescu D.St.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Rainer Gh.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Râmniceanu I. Cristian* (lic. Milit, Iaşi), *Ţanovici V. C.*, *Vâlceanu N. I.* (lic. Tg.-Jiu) şi *Vasiliu Gh. Gh.* (Timişoara).

5. Au dat numai soluţiile 144400 şi 324900, d-nii: *Baciu G. T.* (lic. R.-Sărat), *Isăcescu C. C.* (lic. Tg.-Jiu), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamţ) şi *Stan I. A.* (Şc. de Artilerie, Timişoara).

6. A dat numai soluţiile 225625 şi 324900, d-l *Craiu N. I.* (lic. Piteşti).

7. A dat numai soluţiile 144400 şi 225625, d-l *Avramescu T. I.* (Craiova).

8. D-l *Sabetay A.* (lic. T.-Severin) a dat numai soluţia 225625.

549. — *Să se găsească un patrat perfect de 5 cifre, astfel ca prin suprimarea cifrelor extreme să rămână un cub perfect.*

A. I. STAN.

Fie $abcde$ patratul căutat. Numărul de este unul din numerele şirului:

(1) 00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 89, 96,

cu care se poate termina un patrat perfect, iar bcd poate fi unul din numerele şirului:

(2) 125, 216, 343, 512, 729,

care sunt singurile cuburi de 3 cifre. Cifra d a lui de fiind aceiaşi cu unimile lui bcd, se vor asocia numerele şirului (2) cu acelea din şirul (1) cu care au o cifră comună şi anume cifra unimilor din (2) cu cifra zecilor din (1). Rezultă că $abcde$ poate fi unul din numerele:

e1256; a2161; a3436; a5121: a7296
a2164; a5124;
a2169; a5125;
a5129.

Dând lui a toate valorile de o cifră dela 0 la 9 inclusiv se obţin 100 de numere din care se elimină, prin descompunerea în factori, acelea care nu sunt patrate perfecte. Se găseşte soluţia:

$$15129 = 123^2 \text{ unde } 512 = 8^3.$$

Putem lua pentru bcd, încă 8, 27, 64, ceeace ne conduce la soluţiile:

$$30276 = 174^2, \text{ unde, } 27 = 3^3,$$

şi:

$$80089 = 174^2 \text{ unde, } 8 = 2^3.$$

Au soluţionat problema d-nii: *Aldea N. Nicolae* (lic. M-rea Dealu), *Almăjan Petru*, *Baciu Gh. Teodor*, *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Ghişoiu Petre* (lic. Şpiru Haret, Bucureşti), *Iacob St. Eugen* (sublocot. artilerie), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Teodorescu Aurel* (lic. R.-Sărat) şi *Tomescu V.* când era în cl. VIII la lic. Gh. Lazăr, Bucureşti.

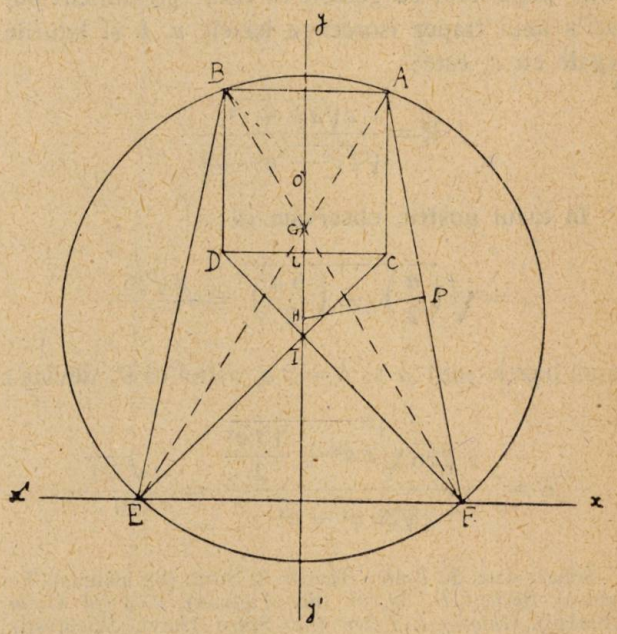
790. — *Se dă patratul* ABCD *de latură a, ale cărui diagonale se taie în* O. *Pe aceste diagonale se duc perpendiculare respectiv în punctele* C *şi* B, *pe care se iau lungimele:*

$$CE = DF = 3CO.$$

1°. *Să se demonstreze că diagonalele trapezului* ABEF *se întâlnesc în centrul de greutate al triunghiului* DOC.

2°. *Să se calculeze raza cercului cirsumscris trapezului* ABEF, *în funcţie de latura a.*

V. ALACI



Construim figura în condiţiile problemei.

1°. Observăm că patrulaterul ABEF este un trapez isoscel şi atunci diagonalele AE, BF se întâlnesc pe dreapta care uneşte mijloacele bazelor, deci pe OG, în G.

Rămâne să arătăm că G e centrul de greutate al triunghiului D O C, adică că, $OG=\frac{2}{3}\ OL=\frac{a}{3}$.

In adevăr, triunghiurile B O G şi G I F sunt asemenea, pentrucă unghiurile lor din G sunt egale ca opuse la vârf şi unghiurile din B şi F sunt egale ca alterne interne,

Atunci rezultă:

$$(1)\qquad \frac{OG}{GI}=\frac{BO}{IF}=\frac{BO}{2BO}=\frac{1}{2}.$$

Dar din triunghiurile asemenea A E C şi G E I, rezultă:

$$GI=\frac{2}{3}a,$$

astfel că înlocuind în (1), găsim:

$$OG=\frac{a}{3},$$

ceiace trebuia dovedit. Diagonalele trapezului A B E F se întâlnesc deci, în centrul de greutate al triunghiului D O C.

2°. In „Exercices de trigonométrie par „F. G. M.“ page 400, se găseşte că raza cercului circumscris unui trapez isoscel cu bazele a, b şi laturile egale cu c, este:

$$R=\frac{c\sqrt{ab+c^2}}{\sqrt{4c^2-(a-b)^2}}.$$

In cazul nostru, observăm că:

$$c=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{5a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{26}}{2},$$

apoi bazele sunt a şi $b=2a$, astfel că R, devine:

$$R=\frac{a\sqrt{26}\sqrt{2a^2+\frac{13a^2}{2}}}{2\sqrt{26a^2-a^2}}=\frac{a\sqrt{221}}{10}.$$

Soluţii date de d-nii: *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. milit. de Geniu), *Mihalcea Emil* (student), *Popescu D. Nicolae*, *Russu Liviu* (Şc. Polit., Timişoara), *Tutoveanu Valeriu* (absolvent, lic. Roman) şi *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, lic. Tg.-Jiu).

Soluţia analitică. Luăm E F ca axă xx' şi O I ca axă yy'. Ţinând seamă de enunţ şi de figură găsim uşor coordonatele punctelor A, B, C, D, E, F, I şi L, anume:

$$A\left(\frac{a}{2},\ \frac{5a}{2}\right),\ B\left(-\frac{a}{2},\ \frac{5a}{2}\right),\ C\left(\frac{a}{2},\ \frac{3a}{2}\right),$$

$$D\left(-\frac{a}{2},\ \frac{3a}{2}\right),\ E(a,\ 0),\ F(-a,\ 0),\ I(0,\ a),$$

$$L\left(0,\ \frac{3a}{2}\right).$$

Coordonatele centrului de greutate G, sunt:

$$(1)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \end{cases}$$

In cazul nostru $\lambda=\frac{1}{2}$, iar coordonatele lui L şi O sunt: $L\left(0,\ \frac{3a}{2}\right)$, $O(0,\ 2a)$, astfel că (1) devine:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{\frac{3a}{2}+\frac{1}{2}2a}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5a}{3}. \end{cases}$$

Deci, $G\left(0.\ \frac{5a}{3}\right)$.

Pentru a răspunde la primul punct al problemei, trebuie să arătăm că intersecţia dreptelor A E şi B F este tocmai G.

Ecuaţiile dreptelor A E şi B F sunt respectiv:

$$\begin{cases} 5x-3y+5a=0 \\ 5x+3y-5a=0. \end{cases}$$

Intersecţia lor, este punctul de coordonate:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{5a}{3}, \end{cases}$$

adică tocmai punctul G, ceiace voiam să dovedim.

2°. Ridicăm pe mijlocul lui A E perpendiculara H P. H e centrul cercului circumscris. Coordonatele lui P sunt: $P\left(\frac{3a}{4},\ \frac{5a}{4}\right)$.

Ecuația dreptei AF este:

$$5x+y-5a=0,$$

coeficientul ei unghiular fiind -5.

Să aflăm coordonatele lui H, intersecția dreptelor HP și yy'. Ecuația dreptei HP, care trece prin P și e perpendiculară pe AF, adică are coeficientul unghiular $\frac{1}{5}$, este:

$$y-\frac{5a}{4}=-\frac{1}{5}\left(x-\frac{3a}{4}\right),$$

sau:

$$2x-10y+11a=0,$$

care intersectată cu $x=0$, ne dă coordonatele punctului H, anume:

$$H\left(0,\ \frac{11a}{10}\right).$$

Acum ușor putem scri mărimea razei $R=HF$, a cercului circumscris trapezului ABEF:

$$R=\sqrt{a^2+\frac{121a^2}{100}}=\frac{a\sqrt{221}}{10}.$$

Soluții date de d-nii: *Carp I. Ignat* (Chișinău), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Fericeanu St. Ștefan* (student, București), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Hamerak Carol* (Caransebeș), *Marineanu Traian* (student, București), *Scarlat D.* și *Zagaican Ilie* (conductor de lucrări publice, Bălți).

Observare. D-l *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru-Haret. București), a dat următoarea interesantă generalizare problemei:

Se dă patratul ABCD *de latură a, ale cărui diagonale se taie în* O. *Pe aceste diagonale se duc perpendiculare respectiv în* C *și* D *pe care se iau lungimele:*

$$CE=DF=(2n+1)CO,$$

(n fiind întreg, pozitiv).

1°. *Să se demonstreze că diagonalele trapezului* ABDE *se întâlnesc pe mediana care pleacă din* O *în triunghiul* DOC, *și să se găsească raportul în care punctul lor de întâlnire împarte această mediană.*

2°. *Să se calculeze raza cercului circumscris trapezului* ABEF. *D-sa găsește:*

$$\frac{OG}{GL}=\frac{2}{2n-1},$$

$$R=\frac{a}{2(2n+3)}\sqrt{(2n+3)^2+[2n+3+(1n+1)^2]^2}$$

Pentru $n=1$, găsim rezultatele de mai sus.

809. — *Să se stabilească identitățile:*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}=ni\sqrt{2}\,\frac{(1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}}{(1+i)^n-(1-i)^n}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)}=(\sqrt{2})^n\,\frac{(-i)^n-i^n}{(1+i)^n-(1-i)^n}$$

V. ALACI

In artîcolul "*O clasă de ecuațiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice*", R. M. T., vol. VIII, pag. 133, se arată că ecuațiunea:

$$[(1+i)x-i]^n-[(1-i)x+i]^n=0,$$

are rădăcinele:

$$x=\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1).$$

Această ecuație se mai poate scri:

$$(1+i)^n x^n-ni(1+i)^{n-1}x^{n-1}+$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}1+i)^{n-2}i^2x^{n-2}+\ldots+(-i)^n-$$

$$(1-i)^n x^n-ni(1-i)^{n-1}x^{n-1}+\ldots-i^n=0,$$

sau încă:

$$[(1+i)^n-(1-i)^n]x^n-ni[(1+i)^{n-1}+$$

$$(1-i)^{n-1}]x^{n-1}+\ldots+(-i)^n-i^n=0.$$

In virtutea relațiilor dintre coeficienții și rădăcinele unei ecuații, putem scri:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)} = n\,i\,\frac{(1+i)^{n-1}+(1-i)^{n-1}}{(1+i)^n-(1-i)^n}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{(-i)^n-i^n}{(1+i)^n-(1-i)^n}.$$

Inmulţind prima egalitate cu $\sqrt{2}$ şi pe a 2-a cu $(\sqrt{2})^n$, obţinem tocmai identităţile cerute.

Soluţii date de d-nii: *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Hamerak Carol* (Caransebeş), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu) şi *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, lic. Tg.-Jiu).

PROBLEME PROPUSE

803[1]). — Să se găsească cubul perfect de şase cifre, astfel ca suma cifrelor să ne dea numărul format de cifra a doua şi a cincea şi care număr să fie cub perfect; cifra treia scrisă după cifra patra să formeze un patrat perfect, iar suma între cifrele întâia, a patra şi a şasea să fie egală cu numărul format de cifrele a treia şi a cincia.

TRAIAN MARINEANU

842. — Să se arate că expresia:

$$3740356^{20}+1934^{24}-1934^4-1,$$

se divide cu 143.

VLADIMIR I. CRIVAT.

843. — Se uneşte fiecare vârf al unui patrat, cu mijloacele laturilor nealăturate. Să se demonstreze că octogonul format prin intersecţia dreptelor duse, este regulat. Să se calculeze suprafaţa lui, în funcţie de latura a patratului dat.

C. GEORGESCU.

844. — Să se arate că dacă a şi b sunt pozitivi, ecuaţia:

$$2a(a+b)x^2+(a+b)^2x-2ab^2=0,$$

are rădăcinele reale.

1) Anulăm problema 803, şi publicăm sub acelaşi număr problema de faţă.

Asemeni oricare ar fi a, ecuaţia:

$$4x^2+4(1+a+a^2)x+(1+a^2+a^4)=0,$$

are rădăcini imaginare.

D. SCARLAT.

845. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=9 \\ xy[x^3z+y^3z+z^4]=0. \end{cases}$$

ION CURCHI

846. — Dacă ecuaţia:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p=0,$$

are toate rădăcinele reale şi negative, atunci toate rădăcinele ecuaţiei:

$$sa_0+(s+2)a_1x+(s+4)a_2x^2+\ldots$$
$$\ldots+(s+2p)a_px^p=0,$$

(s intreg pozitiv) sunt reale şi negative.

Dacă prima ecuaţie are toate rădăcinele reale şi pozitive, toate rădăcinele ecuaţiei a doua sunt reale şi pozitive.

P. SERGESCU

847. — Să se stabilească identitatea:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \sin\frac{(3k+1)\pi}{6n}\sin\frac{(3k+2)\pi}{6n}=\frac{\sqrt{3}}{4^n}.$$

V. ALACI

848. — Intr'un triunghiu dreptunghiu, avem următoarea relaţiune:

$$\frac{\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{2a(b-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

GH. NICHIFORESCU.

Erată. La pag. 70 rândul 4 de jos în sus pe coloana a doua să se citească: ... *şi se scade 765* ... în loc de ... sau se scade 765 ...

Pag. 72 rândul 23 de sus coloana întâi să se citească *analog* în loc de *original*.

ŞCOALA POLITECNICĂ DIN TIMIŞOARA

PROSPECT

Organizarea şcoalei

Şcoala Politecnică din Timişoara cuprinde două secţiuni:

a) Secţiunea de ingineri electro-mecanici,

b) Secţiunea de ingineri de mine.

Învăţământul se întinde pe durata de cinci ani; un an preparator şi patru ani de studii, după care absolventul obţine diploma de inginer, în specialitatea pe care şi-a ales-o.

Atmiterea studenţilor

Admiterea şi matricularea studenţilor se face în anul preparator al şcolii pe baza unui examen de admitere ce se ţine la 7 Octombrie 1929, ora 8 dim. în Timişoara, Şcoala Polltechnică.

Inscrierea la acest examen se face pr.n o cerere (model), timbrată, adresată Direcţiunii şcoalei şi însoţită de următoarele acte în original:

a) actul de naştere,

b) un certificat medical constatând că candidatul este de o constituţie sănătoasă,

c) una din următoarele diplome:

diploma de bacalaureat al liceului,

diploma de absolvire a unei şcoale superioare de comerţ.

diploma de absolvire a unei şcoale de conducători de lucrări publice, sau a şcoalei de conducători arhitecţi din Cernăuţi.

diploma de absolvire a unei şcoale de arte şi meserii însoţită de certificatul de absolvire a patru clase secundare.

Diplomele altor şcoale străine vor trebui să fie echivalate de Ministerul Instrucţiunei.

d) Două fotografii (format 6|9 cm.) semnate.

Examenul de admitere are loc în scris şi oral în faţa unei comisiuni sub preşedenţia directorului şcoalei.

Cererile de înscriere pentru examen se primesc la cancelaria şcolii până la 3 Octombrie 1929 cel mai târziu.

Candidaţii reuşiţi la examen vor fi înmatriculaţi în anul preparator al şcoalei.

Studenţii altor şcoale Politecnice străine pot fi admişi şi în anii I, II sau III pe baza unui examen de diferenţă, care va fi hotărît de Comitetul de Direcţie.

Taxe

Taxa de înscriere este de 500 lei pentru examenul de admitere în şcoală. Această taxă se achită înainte de închiderea înscrierilor. De această taxă nu poate fi scutit nimeni.

Taxa de dlferenţă este de 500 lei.

Programul examenului de admitere

1. Probă scrisă şi orală din Aritmetică.
2. Probă scrisă şi orală din Geometrie plană şi în spaţiu.
3. Probă scrisă şi orală din Algebră şi Trigonometrie.
4. Lucrare scrisă cu un subiect din Fizică, Chimie sau Cosmografie.

Programul cunoştinţelor din care se dau aceste probe este programul de liceu, publicat în *Monitorul Oficial*, No. 96 din 3 Mai 1929.

Direcţiunea

ŞCOALA POLITECNICĂ DIN TIMIŞOARA

PROSPECT

Şcoala Politecnică din Timişoara publică concurs de intrare în anul I al Şcoalei pentru:

a) Bacalaureaţii absolvenţi a opt clase liceale,

b) diplomaţii unei şcoale superioare de comerţ,

c) diplomaţii unei şcoale de conducători de lucrări publice, sau a şcoalei de conducători arhitecţi din Cernăuţi.

d) diplomaţii unei şcoale superioare de arte şi meserii însoţită de certificatul de absolvire a patru clase secundare.

Examenul va avea loc la 1 Octombrie 1929, ora 8 dim. în Timişoara, Şcoala Politecnică şi va consta din:

1. Probă scrisă şi orală din matematici generale (algebră superioară, trigonometrie).

b) Probă scrisă şi orală de geometrie (plană şi spaţiu),

c) Probă scrisă şi orală din geometria descriptivă (punctul dreapta, planuri şi metodele descriptivei, schimbare de plan, rotaţie şi rabatere)

d) Probă scrisă şi orală din fizică (Gravitatea, Optica. Hidrostatica, Acustica, Căldura, Magnetism şi Electricitate),

e) Probă scrisă şi orală din Chimie (Chimie anorganică),

Inscrierea la acest examen se face prin o cerere model, timbrată, adresată Direcţiunei Şcoalei şi însoţită de următoarele acte în original:

a) actul de naştere,

b) un certificat medical din care să se constate, că candidatul este pe deplin sănătos,

c) una din diplomele menţionate mai sus,

d) două fotografii (format 6|9 cm.) semnate.

Candidaţii reuşiţi la examen vor fi înmatriculaţi în anul I al şcoalei.

Studenţii altor şcoale Politecnice străine pot fi admişi şi în anii I, II sau III pe baza unui examen de diferenţă care va fi hotărît de Comitetul de Direcţie.

Cererile de înscriere pentru examen se primesc la cancelaria şcoalei până la 25 Septembrie cel mai târziu,

Taxe

Taxa de înscriere este de 500 lei pentru examenul de admitere în şcoală.

Această taxă se achită înainte de închiderea înscrierilor. De aceste taxe nu poate fi scutit nimeni.

Taxa de diferenţă este de 500 lei.

Direcţiunea

A se vedea mai detailat în „Monitorul Oficial", 152 din 13 Iulie 1929 şi 178 din 13 August 1929.

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 OCTOMBRIE 1929 No. 8

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CEZAR COSNIȚĂ. DEMONSTRATII GEOMETRICE PENTRU CATEVA PROPRIETATI DEDUSE PE CALE DE TRANSFORMARE.
2. NOTE MATEMATICE, 20, 21.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 777. 787, 815, 816, 821.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiuniel problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

ANUL IX — No. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1929

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

DEMONSTRAȚII GEOMETRICE PENTRU CATEVA PROPRIETAȚI DEDUSE PE CALE DE TRANSFORMARE

de CEZAR COSNITA

In „*Foaia Matematică*“, vol. III, No. 7, în articolul: „Asupra unor puncte“, se enunță câteva proprietăți ale triunghiului, relative la punctele colineare. De oarece autorul articolului deduce acele proprietăți prin „*Transformarea Cosogonală*“, cred că nu-s lipsite de interes demonstrațiile directe, geometrice ale acestor chestiuni — ceiace mi-am propus să fac în cele ce urmează. Având însă în vedere că acele proprietăți sunt prea particulare voi enunța și stabili altele ceva mai generale, din care se pot deduce acelea.

***

1. *Fie un punct* P *în planul triunghiului* ABC *și* A_1, B_1, C_1 *simetricile lui* P *în raport cu mijloacele laturilor triunghiului. Dreptele* A_1B, A_1C, *tae cercul* BPC *în* A_b, A_c. *Analog obținem punctele* B_a, B_c *și* C_a, C_a. *Dreptele* $A_b A_c$, $B_c B_a$ *și* $C_a C_b$ *tae laturile* BC, CA, AB *în trei puncte colineare.*

Soluțiune. Fie:

$$M \equiv (A_b A_c,\ BC);\quad N \equiv (B_a B_c,\ CA);$$

$$P' \equiv (C_a C_b,\ AB).$$

Triunghiul A_1BC, tăiat de transversala $A_b A_c M$ dă:

$$(1)\qquad \frac{MB}{MC}\cdot\frac{A_c C}{A_c A_1}\cdot\frac{A_b A_1}{A_b B} = +1.$$

Dar triunghiurile PBC și $A_1 A_c A_b$ sunt asemenea; patrulaterele PBA_cC și PCA_bB de asemenea; deci:

$$\frac{A_b A_1}{A_c A_1} = \frac{PB}{PC},\quad \frac{A_c C}{A_b B} = \frac{PB}{PC}.$$

Cu acestea relația (1) devine:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{\overline{PB}^2}{\overline{PC}^2}.$$

La fel deducem:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{\overline{PC}^2}{\overline{PA}^2},\quad \frac{P'A}{P'B} = \frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2}.$$

De unde rezultă:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{P'A}{P'B} = \frac{\overline{PB}^2}{\overline{PC}^2}\cdot\frac{\overline{PC}^2}{\overline{PA}^2}\cdot\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2} = +1,$$

deci punctele M. N, P' sunt colineare.

Dacă prelungim BP, CP *până tae cercul* A_1BC *în două puncte, dreapta care trece prin aceste puncte împreună cu similarele ei întâlnesc laturile respective ale triunghiului tot în trei puncte colineare.* Demonstrația analoagă.

Când P este centrul cercului înscris în ABC avem prima proprietate din articolul menționat.

2. *Fie* P *un punct din planul triunghiului* ABC, A_1, B_1, C_1 *simetricile lui* P *în raport cu mijloacele laturilor triunghiului și* A_2, B_2, C_2 *proecțiile punctelor* A_1, B_1, C_1 *pe* BC, CA, AB. *Se proectează punctul* A_2 *în* A'_b *și* A'_c *pe* A_1B *și* A_1C. *Analog obținem punctele* B'_a, B'_c *și* C'_a, C'_b. *Dreptele* $A'_b A'_c$, $B'_a B'_c$, $C'_a C'_b$ *tae laturile* BC, CA, AB *în trei puncte colineare, dacă triunghiul podar al punctului* P *în raport cu* ABC *este omologic cu acesta.*

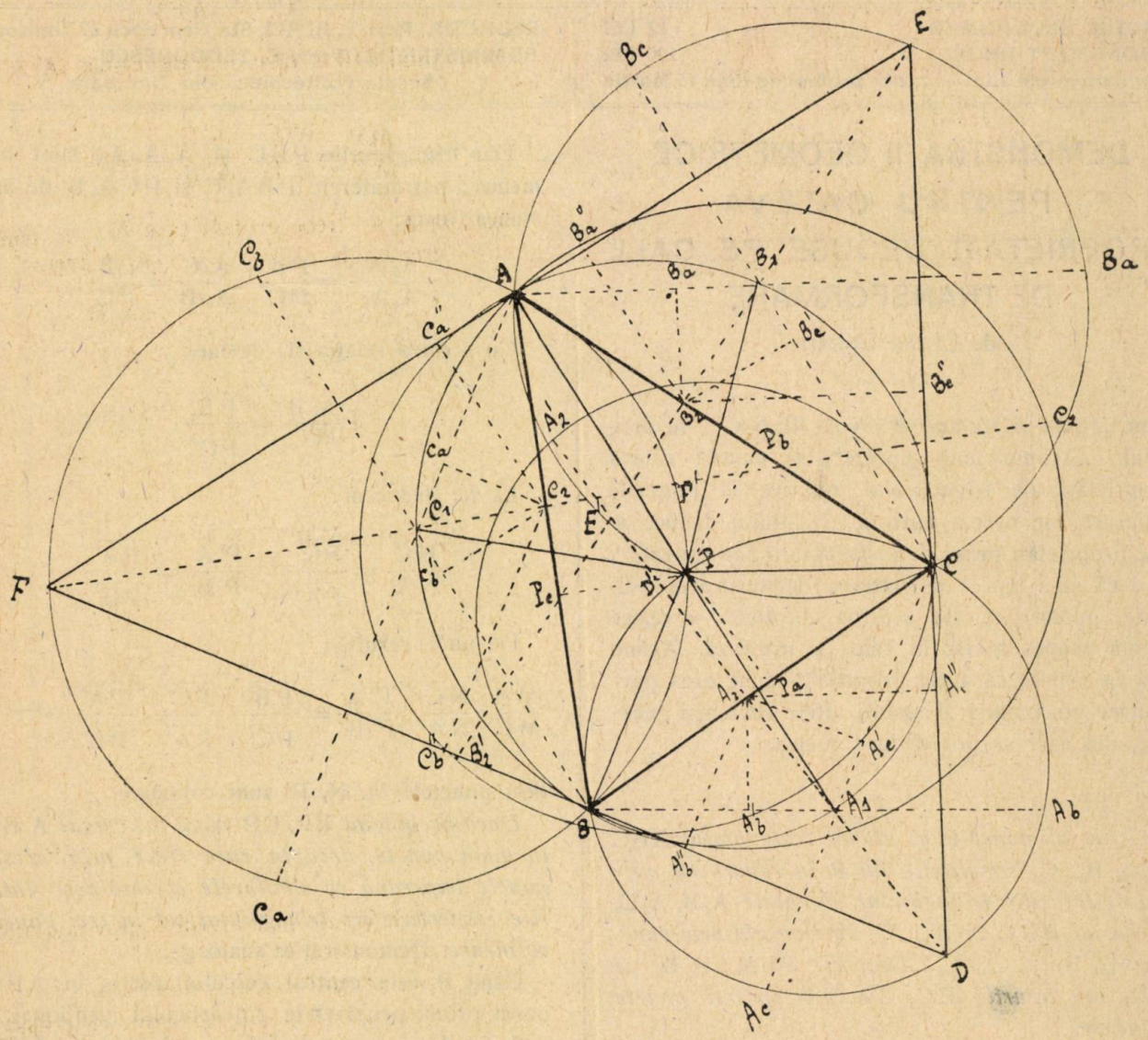
Soluțiune: In adevăr, fie:

$$M \equiv (A'_b A'_c,\ BC);\ N \equiv (B'_a B'_c.\ AC);$$

$$P' \equiv (C'_a C'_b,\ AB).$$

Triunghiul A_1BC tăiat de transversala $A'_b A'_c M$ dă:

$$(1) \qquad \frac{MB}{MC} \cdot \frac{A'_c C}{A'_c A_1} \cdot \frac{A'_b A_1}{A'_b B} = +1.$$



Din triunghiurile dreptunghice A_1A_2C și A_1A_2B scoatem:

$$\frac{A'_c C}{A'_c A_1} = \frac{\overline{A_2 C}^2}{\overline{A_2 B_1}^2}, \quad \frac{A'_b A_1}{A'_b B} = \frac{\overline{A_2 A_1}^2}{\overline{A_2 B}^2}$$

$$\therefore \quad \frac{A'_c C}{A'_c A_1} \cdot \frac{A'_b A_1}{A'_b B} = \frac{\overline{A_2 C}^2}{\overline{A_2 B}^2}.$$

Relația (1) devine:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{\overline{A_2 B}^2}{\overline{A_2 C}^2}.$$

Analog deducem:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{\overline{B_2 C}^2}{\overline{B_2 A}^2}, \quad \frac{P'A}{P'B} = \frac{\overline{C_2 A}^2}{\overline{C_2 B}^2}.$$

Deci:

$$(2)\quad \frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{P'A}{P'B}=\left(\frac{A_2B}{A_3C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}\right)^2.$$

Triunghiul podar $P_aP_bP_c$ al punctului P fiind omologic cu ABC înseamnează că dreptele AP_a, BP_b, CP_c sunt concurente. Observăm acum pe figură că triunghiurile PP_aA_3 (A_3 fiind mijlocul lui BC) și $A_1A_2A_3$ sunt egale deci: $A_3A_2=P_aA_3$. Rezultă că punctele A_2 și P_a sunt izotomice deci AA_2 este transversala unghiulară reciprocă a transversalei AP_a; la fel pentru BB_2, CC_2, de unde conchidem că cevienele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente și deci avem relația:

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=-1.$$

Relația (2) se reduce la:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{P'A}{P'B}=+1,$$

adică punctele M, N, P' sunt colineare.

Dacă am proecta pe P_a *pe* PB *și* PC, *atunci dreapta care trece prin cele două proecții împreună cu analoagele, tae laturile* BC, CA, AB *de asemenea în trei puncte colineare.*

In particular când P este centrul cercului înscris în ABC, punctele P_a, P_b, P_c sunt punctele de tangență ale acestui cerc cu laturile și deci dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt transversalele unghiulare ale punctului lui *Nagel*, iar AP_a, BP_b, CP_c ale punctului lui *Gergonne*. In acest caz suntem în enunțul proprietății (2) a articolului citat.

Dacă P este ortocentrul triunghiului ABC, punctele A_1, B_1, C_1 sunt diametralele opuse vârfurilor A, B, C în cercul circumscris. Am regăsit astfel proprietatea care face obiectul problemei No. 761 din R. M. T.

3. *Fie* P *un punct din planul triunghiului* ABC, A_1, B_1, C_1 *simetricile lui* P *în raport cu mijloacele laturilor triunghiului și* A_2, B_3, C_2 *proecțiile punctelor* A_1, B_1, C_1 *pe* BC, CA, AB. *Fie* D, E, F *ortocentrele triunghiurilor* A_1BC, B_1CA, C_1AB *iar* A_b'', A_c''; B_a'', B_c''; C_a'', C_b'' *proecțiile punctelor* A_2, B_2, C_2 *respectiv pe* DB, DC; EA, EB; FA, FB. *Dreptele* $A_b''A_c''$, $B_c''B_a''$, $C_a''C_b''$ *tae laturile* BC, CA, AB *în trei puncte colineare, dacă triunghiul podar al punctului* P *este omologic cu* ABC.

Soluțiune. Notăm ca mai sus:

$$M\equiv(A_b''A_c'',\ BC);\quad N\equiv(B_c''B_a'',\ CA);$$
$$P'\equiv(C_a''C_b'',\ AB).$$

Triunghiul DBC tăiat de transversala $(A_b''A_c''M$ ne dă:

$$(1)\quad \frac{MB}{MC}\cdot\frac{A_c''C}{A_c''D}\cdot\frac{A_b''D}{A_b''B}=+1.$$

Dreapta A_2A_1 trece evident prin D; în triunghiurile dreptunghice DA_2C și DA_2B avem:

$$\frac{A_c''C}{A_c''D}=\frac{\overline{A_2C}^2}{\overline{A_2D}^2},\quad \frac{A_b''D}{A_b''B}=\frac{\overline{A_2D}^2}{\overline{A_2B}^2}$$
$$\therefore\quad \frac{A_c''C}{A_c''D}\cdot\frac{A_2''D}{A_2''B}=\frac{\overline{A_2C}^2}{\overline{A_2B}^2}.$$

Relația (1) devine:

$$\frac{MB}{MC}=\frac{\overline{A_2B}^2}{\overline{A_2C}^2}$$

și analog:

$$\frac{NC}{NA}=\frac{\overline{B_2C}^2}{\overline{B_2A}^2},\quad \frac{P'A}{P'B}=\frac{\overline{C_2A}^2}{\overline{C_2B}^2};$$

deci avem:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{P'A}{P'B}=\left(\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}\right)^2$$
$$=(-1)^2=+1,$$

conform cu cele spuse mai înainte; decî punctele M, N, P' sunt colineare.

Dacă P este centrul cercului înscris în ABC, dreptele DE, EF, FD sunt bisectoarele exterioare ale lui ABC și suntem în cazul proprietății (3) din articolul menționat.

4. *Fie* P *un punct din planul triunghiului* ABC, A_1, B_1 C_1 *simetricile lui* P *în raport cu mijloacele laturilor triunghiului. Perpendiculara din* A_1 *pe* BC *tae latura* BC *în* A_2 *și cercul* A_1BC *în* A_2'. *Analog se obțin punctele* B_2', C_2'. *Să se arate că:*

a. Tangentele în A_1, B_1, C_1 *la cercurile* A_1BC *și analoagele tae laturile* BC, CA, AB *în trei puncte colineare.*

b. Tangentele în A'_2, B'_2, C'_2 *la aceleași cercuri tae laturile* BC, CA, AB *tot în trei puncte colineare dacă triunghiul podar al punctului* P *este omologic cu* ABC.

Soluțiune: Proprietatea *a.* este în strânsă legătură cu următoarea: „*Tangentele în punctul* P *din planul unui triunghiu* ABC, *la cercurile* PBC, PCA, PAB *tae pe* BC, CA, AB *în trei puncte colineare*".

Voi soluționa mai întâi această chestiune. într'u cât, deși proprietatea e cunoscută dé mult, demonstrația ce o dau e foarte simplă și poate și nouă.

Fie M, N, P' intersecțiile tangentelor, duse în P la cele trei cercuri, cu laturile opuse. Se știe că „tangenta într'un vârf al unui triunghiu la cercul circumscris, determină pe latura opusă segmente proporționale cu patratele laturilor alăturate". Avem, deci:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{\overline{PB^2}}{\overline{DC^2}}$$

și analog:

$$\frac{NC}{NA} = \frac{\overline{PC^2}}{\overline{PA^2}}, \quad \frac{P'A}{P'B} = \frac{\overline{PA^2}}{\overline{PB^2}}.$$

Deci:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{P'A}{P'B} = +1,$$

punctele M, N, P' sunt deci colineare. Pentru proprietatea *a.* demonstrația e absolut analoagă, căci cercurile BPC, BA_1C fiind simetrice avem:

$$A_1C = PB \text{ și } A_1B = PC,$$

deci:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{P'A}{P'B} = \left(\frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{C_1B}{C_1A}\right)^2 = +1,$$

adică punctele M, N, P' — intersecțiile tangentelor în A_1, B_1, C_1 cu BC, CA, AB — sunt colineare.

Pentru a demonstra proprietatea *b.* folosim tot proprietatea de care se bucură tangenta la cercul circumscris unui triunghiu intr'unul din vârfuri. In adevăr fie M, N, P' intersecțiile tangentelor în A'_2, B'_2, C'_2, la cercurile A_1BC, B_1CA, C_1AB cu BC, CA, AB. Avem:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{\overline{A'_2B^2}}{\overline{A'_2C^2}}.$$

Observăm că triunghiurile A'_2BA_2 și A_1CA_2 sunt asemenea; triunghiurile A'_2CA_2 și A_1BA_2 sunt tot asemenea, deci:

$$\frac{A'_2B}{A_1C} = \frac{A_3B}{A_1A_2}, \quad \frac{A'_2C}{A_1B} = \frac{A_2C}{A_1A_2}.$$

Impărțind relația întâia prin a doua și apoi ridicând la patrat avem:

$$\frac{\overline{A'_2B^2}}{\overline{A'_2C^2}} = \frac{\overline{A_1C^2}}{\overline{A_1B^2}} \cdot \frac{\overline{A_2B^2}}{\overline{A_2C^2}} = \frac{\overline{PB^2}}{\overline{PC^2}} \cdot \frac{\overline{A_2B^2}}{\overline{A_2C^2}} = \frac{MB}{MC}.$$

Avem deci relația:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{P'A}{P'B} =$$

$$\frac{\overline{PB^2}}{\overline{PC^2}} \cdot \frac{\overline{PC^2}}{\overline{PA^2}} \cdot \frac{\overline{PA^2}}{\overline{PB^2}} \left(\frac{A_2B}{A_2C} \cdot \frac{B_2C}{B_2A} \cdot \frac{C_2A}{C_2B}\right)^2 = +1,$$

conform celor arătate la proprietatea 2. punctele M, N, P' sunt deci colineare.

Când P este centrul cercului înscris în ABC avem proprietrtea 4. din articolul citat.

Dacă notăm cu D', E', F' punctele unde dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 tae a doua oară cercurile BPC, CPA, APB putem enunța încă proprietățile următoare:

a_1. *Tangentele în* D', E', F' *la cele trei cercuri tae laturile* BC, CA, AB *în trei puncte colineare.* (Demonstrația este ca la proprietatea *a.* observând că $D'B = PC$ și $D'C = PB$... etc.)

b_1. *Tangentele în* D, E, F *la aceleași cercuri tae laturile* BC, CA, AB *tot în trei puncte colineare, când triunghiul podar al punctului* P *este omologic cu* ABC. (Demonstrația ca la proprietatea *b.* observând că: $A'_2B = DB$ și $A'_2 = DC$).

Când P este centrul cercului înscris în triunghiul ABC aceste două din urmă proprietăți sunt tocmai acele cari fac obiectul problemei 261 din „Foaia Matematică", vol. II, No. 10, propusă tot de autorul articolului citat mai sus.

NOTE MATEMATICE

20. *Câteva chestiuni de algebră.*

In exercițiul 5251 din *„l'Éducation mathématique“*, an. 29, No. 1, pag. 7 se demonstrează prin metoda de recurență că:

Dacă însemnăm $x+\frac{1}{x}=y$ *expresiunea* $x^n+\frac{1}{x_n}$ *(n întreg, pozitiv) poate fipusă sub forma unui polinom întreg în y.*

Demonstrația se bazează pe observarea relației:

$$P_n = y P_{n-1} - P_{n-2}.$$

Astfel se găsește că:

$$P_0 = 2,\ P_1 = y,\ P_2 = y^2 - 2,\ P_3 = y^3 - 3y,$$
$$P_4 = y^4 - 4y^2 + 2.$$

Folosind aceiași metodă, vreau să arăt în această notă că:

Dacă punem $x - \frac{1}{x} = y$, *expresiile:*

$$x^{2n+1} - \frac{1}{x^{2n+1}} \quad \text{și} \quad x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}$$

(n fiind întreg, pozitiv) pot fi puse sub forma unor polinoame întregi în y.

Pentru aceasta, să remarcăm identitățile:

$$(1)\quad x^{2n+1} - \frac{1}{x^{2n+1}} \equiv \left(x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(x^{2n-1} - \frac{1}{x^{2n-1}}\right)$$

$$(2)\quad x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}} \equiv \left(x^{2n-1} - \frac{1}{x^{2n-1}}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(x^{2n-2} + \frac{1}{x^{2n-2}}\right).$$

Dar:

$$(3)\quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = y^2 + 2$$

$$(4)\quad x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) =$$

$$\left[\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right]\left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) = y^3 + 3y.$$

Legea de recurență stabilită mai sus, în (1) și și (2), ne permite să spunem că, dacă expresiunile succesive:

$$x^{2n-2} + \frac{1}{x^{2n-2}} \quad \text{și} \quad x^{2n-1} - \frac{1}{x^{2n-1}},$$

sunt polinoame întregi în y, atunci și $x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}$ prin urmare și $x^{2n+1} - \frac{1}{x^{2n+1}}$ au această proprietate. Intre aceste polinoame există relațiile:

$$P_{2n+1} = y P'_{2n} + P_{2n-1},\ P'_{2n} = y P_{2n-1} + P_{2n-2},$$

cari ne ajută să le calculăm, din aproape în aproape. Trebue să remarcăm că, dacă punem:

$$P'_0 = x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2,$$

egalitățile (3) și (4) intră în formele generale (1) și (2).

Astfel găsim:

$$P'_0 = 2,\ P_1 = y,\ P'_2 = y^2 + 2,\ P_3 = y^3 + 3y,$$
$$P'_4 = y(y^3 + 3y) + y^2 + 2 = y^4 + 4y^2 + 2,$$
$$P_5 = y(y^4 + 4y^2 + 2) + y^3 + 3y = y^5 + 5y^3 + 5y.$$

Se poate ușor observa că:

1°. Polinoamele P_{2n+1} și P_{2n} sunt respectiv de gradele $2n+1$ și $2n$ în y.

2°. Polinomul P_{2n+1} conține numai termeni de grad impar, iar P'_{2n} numai termeni de grad par.

3°. Coeficientul celei mai mari puteri a lui y e egal cu unitatea.

Ca o aplicație a celor stabilite, *să găsim condiția pentru ca rezolvarea ecuației reciproce de gradul 8:*

$$Ax^8 + Bx^7 + Cx^6 + Dx^5 + Ex^4 - Dx^3 + Cx^2 - Bx + A = 0,$$

să se reducă la rezolvarea unei ecuații reciproce de gradul 4.

Ecuația dată, împărțită cu x^4, este:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E - D\frac{1}{x} + C\frac{1}{x^2} - B\frac{1}{x^3} + A\frac{1}{x^4} = 0,$$

$$\therefore\ A\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + B\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + C\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + D\left(x - \frac{1}{x}\right) + E = 0.$$

Insemnând:

$$x - \frac{1}{x} = y,$$

avem:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+2,\quad x^3-\frac{1}{x^3}=y^3+3y,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4+4y^2+2.$$

Deci, ecuația dată e înlocuită de ecuația în y:

$$(5)\quad Ay^4+By^3+(4A+C)y^2+(3B+D)y+2A+2C+E\equiv 0.$$

Pentru ca această ecuație să fie reciprocă, trebue ca:

$$\begin{cases} A=2A+C+E \\ B=3B+D, \end{cases}$$

adică:

$$\text{I}\qquad \begin{cases} D=-2B \\ E=-(A+2C), \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} A=2A+2C+E \\ B=-(3B+D), \end{cases}$$

adică:

$$\text{II}\qquad \begin{cases} D=-4B \\ E=-(A+2C). \end{cases}$$

Dacă condițiile I sunt îndeplinite, ecuația (5) devine:

$$Ay^4+By^3+(4A+C)y^2+By+A=0.$$

Dacă condițiile II sunt îndeplinite, ecuația (5) devine:

$$Ay^4+By^3+(4A+C)y^2-By+A=0.$$

Observarea I. In *„l'Éducation mathématique"*, an. XXX, pag. 122 se găsește că, condiția pentru ca ecuația:

$$Ax^8+Bx^7+Cx^6+Dx^5+Ex^4+Dx^3+Cx^2+Bx+A=0.$$

să se reducă la o ecuație reciprocă de gr. IV, este:

$$\begin{cases} D=4B \\ E=2C-A. \end{cases}$$

Observarea II. In legătură cu chestiunile tratate, se poate remarca identitatea:

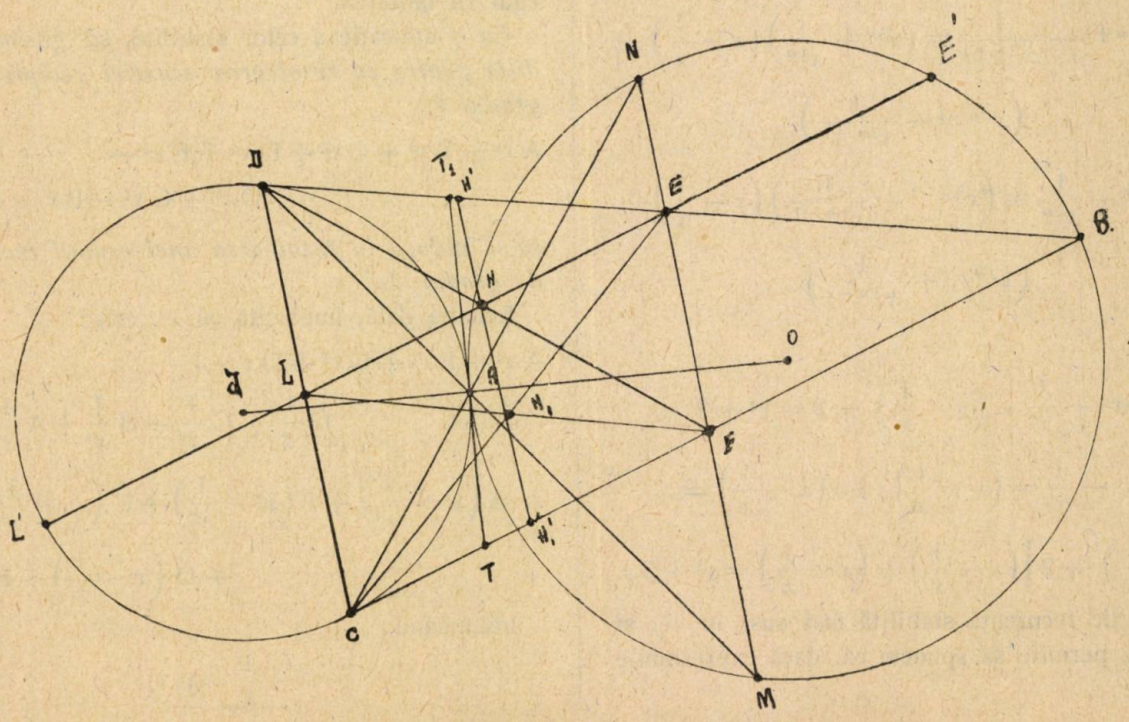
$$x^n-\frac{1}{x^n}=\left(x^{n-1}-\frac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{n-2}-\frac{1}{x^{n-2}}\right)$$

I. MURAROIU

21. *Asupra problemei 760.*

Problema 760 rezolvată în R. M. T., a. IX, pag. 41, are ca punct de plecare două cercuri tangente interior.

In cele ce urmează voi arăta că punctele F, D și H, mijlocul lui EL sunt colineare, deci problema subsistă, și în cazul când am avea două cercuri tangente exterior, indiferent dacă tangentele sunt duse la cercul mare sau la cel mic.



Din figura construită în acest caz, după ce am dus tangenta comună în A, reese:

$$\sphericalangle CDA = \frac{\text{arc } AC}{2} = \sphericalangle CAT,$$

dar:

$$\sphericalangle CAT = \sphericalangle T'AN,$$

ca opuse la vârf.

Şi:

$$\sphericalangle T'AN = \frac{\text{arc } AN}{2} = \sphericalangle AMN,$$

unde T şi T′ sunt două puncte pe tangenta comună în A.

Din cele de mai sus avem;

$$\sphericalangle CDA = \sphericalangle AMN,$$

şi la fel:

$$\sphericalangle DCA = \sphericalangle ANM$$

$$\therefore \Delta CDA \sim \Delta NMA$$

$$\therefore DC \parallel NM.$$

căci $\overset{\frown}{DAC}$ şi $\overset{\frown}{MAN}$ sunt opuse.

Restul demonstraţiei este acelaş ca la problema 760.

Notă. 1°. La fel se arată că punctele E, C şi H′ mijlocul lui FL sunt colineare.

2°. Se vede foarte uşor că punctele H şi H_1 se găsesc pe dreapta $H'H_1'$ care uneşte mijloacele lui DE şi CF.

HARALAMB P. IONESCU

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examenul de admitere în anul I

Lucrări scrise

1 Octombrie 1929

Algebră

I.

Se dă funcţiunea:

$$y = x - (a-5)\,L\sqrt{x^2-5x+6} + (5a-2b-13)\,L\sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$$

unde *a şi b* sunt constante.

Se cere: 1°. Derivata funcţiunei.

2. Calcularea constantelor *a* şi *b* astfel ca suma patratelor rădăcinelor derivatei să fie 17, iar produsul lor 4.

3. Introducând în funcţiunea dată valorile pozitive pentru *a* şi *b*, să se studieze funcţiunea astfel obţinută.

II.

Se dă ecuaţiunea:

$$x^3 - a\,x^2 - x - 3 = 0.$$

Să se determine numărul pozitiv *a*, astfel ca suma patratelor rădăcinelor sale să fie 11.

Inlocuind valoarea găsită pentru *a* în ecuaţia dată, se cere să se rezolve această ecuaţie.

(Timpul acordat, 8 — 12).

Trigonometrie

1 Octombrie 1929

I.

Să se determine totalitatea arcelor care satisfac relaţiunea:

$$\frac{\sin 2x \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \sin x - \frac{1}{2}}{4\cos^3\frac{x}{3} + 4\cos^2\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3} - 1} > 0.$$

II.

Se consideră octogonul regulat ABCDEFGH şi se trasează diagonalele AC, AD, AE, AF şi AG.

Să se facă calculabilă prin logaritmi şi să se calculeze cu trei zecimale exacte valoarea expresiei:

$$E = \sin\overset{\frown}{BAC} + \sin\overset{\frown}{BAD} + \sin\overset{\frown}{BAE} + \sin\overset{\frown}{BAF} + \sin\overset{\frown}{BAG}$$

(Timpul acordat, 2 — 6).

Geometrie

2 Octombrie 1929

Se dau două cercuri ortogonale C şi C′ cu razele R şi R′. Fie AB coarda lor comună.

Prin A se duce o secantă variabilă care tae cercurile precedente în M şi M′. Se cere să se arate când secanta se roteşte în jurul lui A:

1. Că unghiul MBM′ rămâne constant (dându-se valoarea constantei).

2. Paralele duse prin M şi M′ la BM′ şi BM se tae în P. Să se arate că aceste paralele trec fiecare prin câte un punct fix I şi I′.

3, Dreapta II′ trece prin A.

4. Să se deducă de aci că:

$$\frac{BM}{BM'} = \frac{R}{R'}.$$

5. Să se găsească locul geometric al punctului P.

6. Să se arate că aria închisă de curba — loc geometric al lui P — este egală cu suma ariilor cercurilor C şi C′.

(Timpul acordat 8 — 12).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXV, No. 1, Septembrie 1929. Lista membrilor societății „*Gazeta Matematică*". Membrii decedați. Premiile și alte dispoziții ale fondurilor „*Gazetei Matematice*". Aritmetica lui *Nicolae Milescu Spătaru*, de † *V. Cristescu*.

2. *Revista Universitară Matematică*, redactată de *Rodolphe Raclis*. Extrait du Tome 1, 1929, p. 129 — 135, cuprinde:

Remarques surles transformations ponctuelles planes au voisinage d'un point où le jacobien est nul; par *Gaston Iulia*. Cuprinde încă, o fotografie colorată a regretatului *Traian Lalescu*, precum și o scrisoare înălțătoare a ma. relui profesor *Picard*, cu amintiri despre *Traian Lalescu*.

Intre altele spune:

„Je connaissais *Lalesco* depuis de longues années.

Si je me rappelle bien, il avait commencé à suivre mon cours en 1906, alors que je traitais des équations intégrales. Deux ans après, il nous a donné sa remarquable thèse sur l'Équation de *Volterra*, travail plein d'idées ingénieuses, dont il développa plus tard certains points dans une suite de belles études sur les noyaux résolvants, sur les propriétés de la fonction D (λ) de *Fredholm*, etc.

L'intelligence très vive de *Lalesco* lui permetait de voir rapidement le point fondamental dans une question; aussi ses rédactions ont-elles quelque chose de spontané qui est particulièrement attachant. Son esprit-curieux s'intéressait aux parties les plus variées des mathématiques et que de fois nous nous sommes promenés ensemble dans le jardin du Luxembourg, discutant de quelque point de philosophie des sciences".

3. † *Traian Lalescu*, de *Ernest Abason*. coferențiar la școala politechnică din București.

Este o broșură de 16 pagini, extrasă din *Buletinul Societății Politechnice*, No. 7, Iulie 1929, în care se expune pe larg, într'un stil ales și emoționant, viața regretatului și marelui profesor, *Traian Lalescu*. Iată câteva rânduri: „După *Spiru Haret* și *Constantin Gogu*, Facultatea de Matematici din București a avut fericirea să întrunească calitățile atât de variate ale profesorilor *David Emmanuel*, *Gheorghe Țițeica*, *Dumitru Pompeiu* și în urmă pe ale lui *Traian Lalescu*, cel mai tânăr dintre profesorii ei.

Ințelepciunea și blândețea veneratului profesor *David Emmanuel*, care ilustrează de mai bine de 50 de ani catedra de Teoria funcțiunilor. spiritul ponderat, fecund și de o rară claritate a lui *Gheorghe Țițeica*, eleganța de gândire și inclinare spre problemele de filosofie-matematică a lui *Dumitru Pompeiu*, — nu se putea complecta mai fericit, de cât cu calitățile talentului sclipitor a lui *Lalescu*, care aducea în afară de spiritul său pătrunzător și original, de cunoștințele sale întinse, acel dar neprețuit de a-și apropia pe studenți, prin temperamentul său comunicativ. prin entuziasmul său veșnic reînoit și prin acel suflu de tinerețe și de optimism pe care îl radia în jurul său".

4. *E. Abason*. Sur les séries de puissances périodiques. (Extras din Matematica, vol. I, p. 113 — 120, Cluj 1929).

PROBLEME REZOLVATE

777. — *Să se afle limita expresiunei:*

$$E = \frac{y^3 - 5xy^2 + 16x^2 - 4}{3y^4 + (5x+7)y + x^2 - 48},$$

pentru $x = 1$, $y = 2$, *soluții a ecuației:*

$$5y^4 - 3xy^3 + (2x^3 - 7x + 2)y - 15x^4 + 2x^2 - 5x - 32 = 0.$$

VONICA C ION

Observăm că pentru $x = 1$, $y = 2$, expresiunea dată ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Suntem deci în condițiile enunțului dela punctul 2 al articolului. „*O clasă de expresiuni nedeterminate*", (R. M. T., anul IV, No. 1). Vom folosi dar formula (4) din acel articol, anume:

$$(1) \qquad \lim E = \frac{\begin{vmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi'_x(x_1, y_1) & \varphi'_y(x_1, y_1) \\ \psi'_x(x_1, y_1) & \psi'_y(x_1, y_1) \end{vmatrix}},$$

unde, în cazul nostru:

$$f(x, y) = y^3 - 5xy^2 + 16x^2 - 4,$$

$$\varphi(x, y) = 3y^4 + (5x+7)y + x^2 + 48,$$

$$\psi(x, y) = 5y^4 - 3xy^3 + (2x^3 - 7x + 2)y - 15x^4 + 2x^2 - 5x - 32 = 0$$

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 2.$$

Luând derivate parțiale, care ne trebuesc în (1), avem:

$$f'_x(x, y) = -5y^2 + 32x, \quad f'_y(x, y) = 3y^2 - 10xy$$

$$\varphi'_x(x, y) = 5y + 2x, \quad \varphi'_y(x, y) = 12y^3 + 5x + 7$$

$$\psi'_x(x, y) = -3y^3 + 6x^2y - 7y - 60x^3 + 4x - 5,$$

$$\psi'_y(x, y) = 20y^3 - 9xy^2 + 2x^3 - 7x + 2.$$

Aceste expresiuni, pentru $x = 1$, $y = 2$, devin:

$$f'_x(1, 2) = 12, \quad f'_y(1, 2) = -8,$$

$$\varphi'_x(1, 2) = 12, \quad \varphi'_y(1, 2) = 108,$$

$$\psi'_x(1, 2) = -87, \quad \psi'_y(1, 2) = 121.$$

Inlocuind aceste valori în (1), găsim:

$$\lim_{x=1,\,y=2} E = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -8 \\ -87 & 121 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 108 \\ -87 & 121 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -29 & 121 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 27 \\ -29 & 121 \end{vmatrix}} = \frac{63}{904}.$$

Soluții date de d-nii: *Dimi-triu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Grossu I. Mircea* (lic.Carol, Craiova), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit., Geniu), *Țiucra Mircea* (lic. Timișoara) și *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, Tg.-Jiu).

787. — *Se cer patratele perfecte de forma a b a c știind că a c și b c sunt patrate perfecte.*

I. ILIUȚĂ-DABULENI.

$a\,c$ poate fi unul din patratele:

(1) 16, 25, 36, 49, 64, 81,

căci $a \neq 0$.

Atunci $a\,b\,a\,c$, poate fi:

(2) $1\,b\,16$, $2\,b\,25$, $3\,b\,36$, $4\,b\,49$, $6\,b\,64$, $8\,b\,81$.

Fiindcă și $b\,c$ este patrat perfect. poate fi unul din numerile din șirul (1) și încă, 01, 04, 09.

Șirul (2) în virtutea valorilor pe care le poate lua $b\,c$, devine:

1116, 1316. 2225, 3136, 3336, 4049, 4449, 6064, 6664, 8081, 8881.

Dintre acestea, numai 3136 este patrat perfect:

$$3136 = 56^2.$$

Patratul cerut este deci, 3136.

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petru* (absolvent, Caransebeș), *Bâcicov Boris* (bacalaureat, Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Boerescu P. George* (lic. Oltenița). *Carp I. Ignat* (absolvent, Chișinău), *Costache Nicolae* (lic, Oltenița), *Costăchescu V. C-tin* (Șc. Navală), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Dimitriu A. Ioan* (absolvent, Galați), *Dumitrescu N. C-tin* (lic. Focșani), *Fericeanu Ștefan* (student, București), *Georgescu T. Petru* (lic. T.-Severin), *Ghișoiu I. Petre* (lic. Spiru Haret, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ioanițescu D-tru* (lic. Milit., Iași), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. milit. Geniu), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, București), *Mereuță E.* (lic. P.-Neamț), *Mihalcea I. Emilian* (student), *Millea G. E.* (lic. R.-Sărat). *Mocănescu Cr. Ioan* (lic. Târgoviște), *Petrovici D.* (student), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Raciu Gh. Raiceff* (absolvent, lic. Silistra), *Scarlat D-tru* (Șc. navală), *Șchiopulescu M. Ionel* (lic. Caracal), *Secăroiu D-tru* (absolvent, Brașov), *Șerban V. D-tru* (lic. Oltenița), *Șerban Ulmeni* (lic. Oltenița), *Schuller David* (absolvent, Bacău), *Tutoveanu Valeriu* (absolvent, lic. Roman), *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, lic. Tg.-Jiu), *Vonica C. Ioan* și *Zagaican Ilie* (conductor de lucrări publice, Bălți).

Au mai trimes soluții d-nii: *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (student, București), *Cristache M. Grecu* (lic. Oltenița), *Petrică I. Ioan* (Șc. de conductori, Cluj), *Teodorescu St.* (lic. milit., Iași) și *Ungheanu Mihail* (lic. Oltenița).

815. — *Să se deriveze funcțiunile:*

$$y = \arcsin \frac{7x}{\sqrt{x^2+7}}, \quad z = \operatorname{arc\,cot} \frac{\sqrt{7-48x^2}}{7x},$$

și să se explice rezultatul.

MIRCEA A. NEGREA

Se știe că:

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\pm\sqrt{1-u^2}},$$

deci:

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\dfrac{49x^2}{x^2+7}}} \cdot \frac{49}{(x^2+7)\sqrt{x^2+7}} = \frac{49}{(x^2+7)\sqrt{7-48x^2}}.$$

Se știe de asemenea, că:

$$(\operatorname{arc\,cot} u)' = -\frac{u'}{1+u^2},$$

deci:

$$z' = -\frac{1}{1+\dfrac{7-48x^2}{49x^2}} \cdot \frac{-49}{49x^2\sqrt{7-48x^2}} = \frac{49}{(x^2+7)\sqrt{7-48x^2}},$$

y și z au deci aceiași derivată, diferența lor trebue să fie constantă. Să arătăm acest lucru. Din enunț deducem:

(1) $$\sin y = \frac{7x}{\sqrt{x^2+7}},$$

iar :

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 z}}{\sin z} = \frac{\sqrt{7 - 48\,x^2}}{7\,x}.$$

De aci deducem :

$$\sin z \sqrt{7 - 48\,x^2} = 7\,x \sqrt{1 - \sin^2 z}.$$

Ridicând la patrat şi simplificând, deducem :

$$\sin^2 z = \frac{49\,x^2}{7 + x^2} \quad \text{sau :} \quad (2) \quad \sin z = \frac{7\,x}{\sqrt{7 + x^2}}.$$

Din (1) şi (2) rezultă :

$$\sin y = \sin z,$$

sau :

$$\begin{cases} y - z = 2\,k\,\pi \\ y + z = (2\,k + 1)\,\pi. \end{cases}$$

Suma sau diferenţa arcelor y şi z este deci constantă.

Soluţie şi generalizare de d-l *Coşniţă Cezar* (lic. Bârlad). Soluţii date de d-nii : *Aldea N.* (absolvent, M-rea Dealu), *Cristal Gh.* (Şc. superioară de meserii, Iaşi), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Hamerak C.* (Caransebeş), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Petrovici D.* (student), *Negrea A. Mircea* (lic. Brăila) şi *Vâlceanu N. Justin* (absolvent, lic. Tg.-Jiu).

Observare. D-l *Ghişoiu I. Petre* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), arată că mai general derivatele funcţiilor ;

$$y = \operatorname{arc\,sin} \frac{a\,x}{\sqrt{b\,x^2 + a}}, \quad z = \operatorname{arc\,cot} \frac{\sqrt{a - (a^2 - b)\,x^2}}{a\,x}$$

sunt egale :

$$y' = z' = \frac{a^2}{(b\,x^2 + a)\sqrt{a - (a^2 - b)\,x^2}}$$

Deduce, că $y \pm z =$ constant.

816. — *Să se rezolve ecuaţiunea :*

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cotg}^3 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x}{\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{cotg}^4 x} = 2.$$

CEZAR COSNITA

Soluţia autorului.

Inlocuind $\operatorname{tg} x$ şi $\operatorname{cotg} x$ în funcţie de $\sin x$ şi $\cos x$, ecuaţiunea devine :

$$(1) \quad \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} + \frac{\sin^2 x \cos^2 x (\sin^4 x + \cos^4 x)}{\sin^8 x + \cos^8 x} = 2.$$

Dar :

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 -$$

$$3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 1 + 2 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x \cos^2 x - 2).$$

Inlocuind aceste valori în (1) şi ţinând seamă că:

$$2 \sin x \cos x = \sin 2\,x,$$

obţinem :

$$\frac{\sin^2 2\,x}{4 - 3 \sin^2 2\,x} + \frac{\sin^2 2\,x (2 - \sin^2 2\,x)}{8 + \sin^2 2\,x (\sin^2 2\,x - 8)} = 2.$$

Aducând la formă întreagă şi ordonând, avem :

$$5 \sin^6 2\,x - 37 \sin^4 2\,x + 64 \sin^2 2\,x - 32 = 0$$

$$\therefore \quad (\sin^2 2\,x - 1)(5 \sin^4 2\,x - 32 \sin^2 2\,x + 32) = 0.$$

Această ecuaţie este echivalentă cu următoarele :

$$\sin 2\,x = \pm 1, \quad \text{de unde :} \quad x = k\,\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

şi :

$$5 \sin^4 2\,x - 32 \sin^2 2\,x + 32 = 0,$$

care ne dă :

$$\sin 2\,x = \pm \sqrt{\frac{16 \pm \sqrt{256 - 160}}{5}} = \pm \sqrt{\frac{16 \pm 4\sqrt{6}}{5}}$$

Dar se constată uşor că aceste patru valori pentru $\sin^2 x$, sunt în afara intervalului $(-1, 1)$, deci nu sunt soluţii.

Altă soluţie. Insemnăm :

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = z,$$

atunci :

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = z^2 - 2$$

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{cotg}^3 x = z^3 - 3\,z$$

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{cotg}^4 x = z^4 - 4\,z^2 + 2.$$

Inlocuind în ecuaţia dată, obţinem :

$$\frac{1}{z^2 - 3} + \frac{z^2 - 2}{z^4 - 4\,z^2 + 2} = 2.$$

Aducând la formă întreagă şi punând, $z^2 = u$, avem :

$$2\,u^3 - 16\,u^2 + 37\,u - 20 = 0$$

$$\therefore \quad (u - 4)(2\,u^2 - 8\,u + 5) = 0.$$

De aci deducem:

$$u = 4, \quad u = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

Ținând seamă, că:

$$u = z^2 = (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2,$$

avem ecuația:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \pm 2,$$

sau:

$$(\operatorname{tg} x \mp 1)^2 = 0, \quad \therefore \quad \operatorname{tg} x = \pm 1,$$

deci:

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

Mai avem încă ecuația:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \pm \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{6}}{6}},$$

care are rădăcini imaginare.

Soluții date de d-nii: *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Chirilă Gheorghe* (lic. Milit., Iași), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Ioanițescu Gh. D-tru* (lic. Milit., Iași), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Petrovici D.* (student) și *Schuler David* (absolvent, Bacău).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Brotmann I.* (bacalaureat, București), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (student, București) *Mărgineanu Ion* (profesor, Solonta), *Petrică I. Ioan* (Șc. de conductori, Cluj) și *Vâlceanu N. Justin* (Șc. Polit., Timișoara).

Observare. D-l *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), a considerat ecuația mai generală:

$$\frac{\operatorname{tg}^{2p-1} x + \operatorname{cotg}^{2p-1} x}{\operatorname{tg}^{2p+1} x + \operatorname{cotg}^{2p-1} x} + \frac{\operatorname{tg}^{2p} x + \operatorname{cotg}^{2p} x}{\operatorname{tg}^{2p+2} x + \operatorname{cotg}^{2p+2} x} = k.$$

821. — *Se dă un patrat* ABCD *de latură a, ale cărui diagonale se taie în* O. *Prelungim pe* DA *și* CB *respectiv până în* E *și* F *astfel ca:*

$$OA = OE \text{ și } OB = BF.$$

Cu raza OE *se descrie un cerc care întâlnește pe* OL *în* G, L *fiind mijlocul lui* AB. *Diametrul cercului, paralel la* FE, *taie cercul în* M *și* N. *Dreptele* ME *și* NF *se taie în* S. *Se cere;*

1°. Să se calculeze suprafața patrulaterului EFMN *în funcție de latura a.*

2°. Să se arate că punctul S *se află pe prelungirea lui* OG.

3°. Să se calculeze OS *în funcție de latura a.*

TR. MARINEANU

1°. Dreapta MN taie laturile AD și BC în mijloacele lor H și E căci din construcția dată de enunț rezultă că dreptele paralele AE și BF sunt și egale între ele, deci AEFB este dreptunghiu, EF este paralelă cu AB și deci și cu HI.

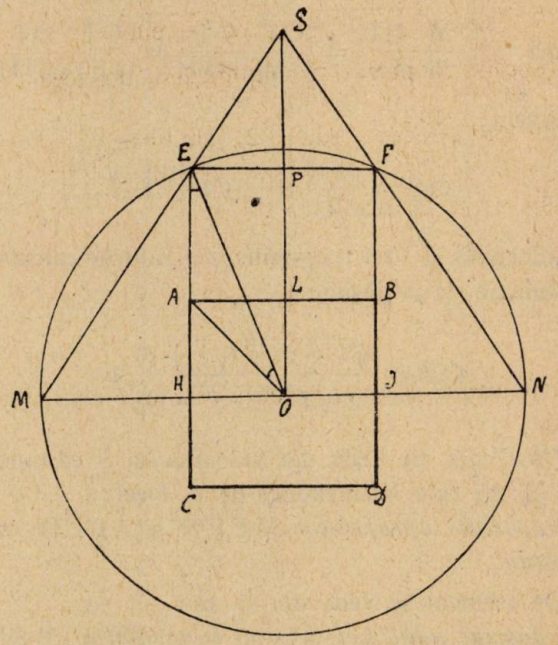


Figura MEFN este evident un trapez isoscel, având 2 laturi paralele și fiind înscrisă în un cerc. Dacă P este mijlocul lui EF atunci OP este perpendiculară pe EF. Fie S suprafața MEFN. Avem:

$$(1) \qquad S = \frac{MN + EF}{2} OP.$$

Avem de pe figură:

$$OP = HA + AE = HA + AO = \frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \qquad \therefore \quad OP = \frac{\sqrt{2}+1}{2} a.$$

$$MN = 2OM = 2OE = 2\sqrt{\overline{HE}^2 + \overline{HO}^2}$$

$$(3) \quad \therefore \quad MN = 2\sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{HO}^2} = a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$(4) \qquad EF = a.$$

Ducând (2), (3) și (4) în (1) găsim:

$$S = \frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}} + a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{2} a =$$

$$\frac{a^2}{4}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1).$$

2°. Trapezul MEFN fiind isoscel, laturile egale ME şi NF se întâlnesc pe linia mediană PO, adică pe OL.

3°. Din triunghiurile asemeni MOS şi MHE se deduce:

$$OS=\frac{OM.HE}{MH}=\frac{OE.OP}{OM-OH}=\frac{OE.OP}{OE-OH}.$$

Avem:

$$OE=\frac{MN}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

Inlocuind în OS lungimile prin valorile calculate în funcţie de a găsim:

$$(5)\qquad OS=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1)}\,a.$$

Observări. Se vede din valoarea lui S că raportul $(S:a^2)$ este independent de a. Deci:

Raportul suprafeţelor MEFN *şi* ABCD *este constant.*

De asemeni se vede din (5) că:

Raportul înălţimei SO *a triunghiului* MSN, *la latura patratului este independent de această latură.*

Aceste două proprietăţi se pot deduce şi din asemănarea figurilor.

Au rezolvat foarte bine problema, dând rezultatele exacte d-nii: *Coşniţă C.* (Bârlad), *Dimitriu A. I.* (absolvent liceu, Galaţi), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaurat, lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ionescu-Ţiu D. C.*, *Popescu O. I.*, *Russu Liviu* (Şc.-Polit., Timişoara) şi *Ţiucra Mircea* (bacalaureat, Timişoara) şi *Vâlceanu N. I.* (absolvent, lic. Tg.-Jiu).

Problema este după cum se vede foarte uşoară. S'au primit la ea 21 soluţiuni din care 16 au fost aruncate la coş pentru că nu dădeau rezultatele exacte.

PROBLEME PROPUSE

849. — Să se arate că expresiunea:

$$754^{2n}\times 9^n-7396^n\times 24^{2n},$$

se divide cu 2163.

MARINEANU TRAIAN

850. — Se cere patratul perfect de patru cifre, astfel ca numărul format de cifrele de rang nepereche să fie patrat perfect, iar cifrele de rang pereche să fie identice şi egale cu suma cifrelor de rang nepereche.

I. ILIUTA-DABULENI

851. — Se dă în plan un punct A şi două drepte. Să se găsească un punct P astfel, ca ducând prin el o dreaptă perpendiculară pe AP, care tae dreptele date în B şi C să avem, $AP=BP=CP$.

P. TROFIMOV

852. — Să se construiască triunghiul ABC cunoscând raza cercului înscris triunghiului o latură şi suma celorlalte două.

JUSTIN N. VALCEANU

853. — Să se arate că polinomul:

$$P(x)=(n+1)(x^n-1)-2[x(x^n-1)-n(x-1)],$$

se divide prin $(x-1)^3$. Se cere şi expresia câtului.

CEZAR COSNITA.

854. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{2(x+1)(x+2)(x+3)}{x+3-4(x-1)+5(x-2)+3(x+1)}=21.$$

ION C. VONICA

855. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+yz=0\\ y+zx=0\\ z+xy=a. \end{cases}$$

C. BERDAN

856. — Să se stabilească identitatea:

$$\sum_{i=0}^{3} C_m^{3-i}C_n^i+C_p^1\sum_{i=0}^{2}C_m^{2-i}C_n^i+(m+n)C_p^2+C_p^3=C_{m+n+p}^3,$$

unde C_r^k înseamnă combinări de r obiecte luate câte k. $(C_r^0=1)$.

V ALACI

INFORMAȚIUNI

Tabel

de studenții reușiți la examenul de admitere în anul I, în ordinea clasificării.

1)	Vâlceanu N. Justin	Lic. Tg.-Jiu
2)	Niculescu G. Savin	„ Sf. Sava, București
3.	Casprovici I. Al. (an. pr.)	„ Bălți
4.	Crăciunescu O. Constantin	„ Mihai-Viteazul, București
5.	Novac N. Aurel	„ Cluj
6.	Paul A. Eugen	„ Timișoara
7.	Morariu Emil (a. pr.)	Șc. Cond. luc. publice Cluj
8.	Stănescu St. Ioan	Lic. Buzău
9.	Rusu I. Liviu (a. pr.)	„ Chișinău
10.	Stancu D. Petre	„ Brăila
11.	Liuba G. Valeriu (a. pr.)	„ Timișoara
12.	Amăriuței Gh. Teodor	„ Cluj
13.	Ghițescu A. Dumitru	„ Târgoviște
14.	Ionescu B. Alexandru	„ Sf. Sava, București
15.	Mojoiu P. Jean Yaques	„ Carol, Craiova
16.	Morțun A. Constantin	Semin. Pedag. Univers. Iași
17.	Cioban I. Virgil (a. pr.)	Lic. Șimlăul Silvaniei
18.	Stanciu Gh. Gheorghe	„ Sibiu
19.	Giurumescu I. Ion (a. pr.)	„ Internat, Iași
20.	Kerekes S. Ștefan (a. pr.)	Șc. Sup. arte mes., București
21.	Avramov A. Mihail (a. pr)	Lic. Bolgrad
22.	Capră D. Alexandru	„ Dorohoi
23.	Cuciuc I. Anatolie (a. pr.)	„ Cetatea Albă
24.	Hamerak F. Carol Ștefan	„ Caransebeș
24.	Teodorescu N. C-tin	„ Lazăr, București
26.	Paraschivescu C-tin (a. pr.)	„ R.-Sărat
27.	Teodoru I. Ioan	„ Lazăr, București
28.	Lacatoș I. Vasile (a. pr.)	„ Satu-Mare
29.	Ciuhureanu Gh. Petre	„ Galați
30.	Piscureanu C-tin (a. pr.)	„ Timișoara
31.	Șendrea D. Alex. Emil	„ Galați
32.	Chirilov P. Victor	„ Chișinău
33.	Verdiș I. Gheorghe (a. pr.)	„ Cetatea-Albă
34.	Barbon A. Emil (a. pr.)	„ Arad
35.	Iliescu P. R. Petru (a. pr.)	„ Bolgrad
36.	Simu G. Iancu (a. pr.)	„ Alba-Iulia
37.	Glava St. Cornel (a. pr.)	„ Deva
38.	Popescu P. Eugen	„ T.-Severin
39.	Djebco N. Vasile	„ Chișinău
40.	Boantă Gh. A-dru (a. pr.)	„ Brăila
41.	Bordan S. Silvius	„ Timișoara
42.	Cristescu G. Ioan	„ Ploești
43.	Tiron E Adolf (a. pr.)	„ Suceava
44.	Lazăr B. Gheorghe	„ Cluj
45.	Lupu I. Nicolae	„ Galați
46.	Sandor I. Iosif (a. pr.)	„ Satu-Mare
47.	Tenie V. Virgil	„ Șincai, București
48.	Popa Victor Liviu	„ Arad
49.	Săsărman S. Emil (a. pr.)	Șc. Cond. Lucr. Publice, Cluj

Recomandăm călduros corespondenților noștri, cartea „*Gândirea Matematică*“ a d-lui profesor universitar *Petre Sergescu*, premiată de *Academia Română*.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul VIII, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 NOEMBRIE 1929 No. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIŞOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREŢUL UNUI NUMAR 12 LEI PREŢUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. HARALAMB P. IONESCU. INEGALITATI INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU.
2. NOTE MATEMATICE, 22, 23.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 803, 806, 810, 814, 817, 819, 824, 825.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiuniel problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

ANUL IX — No. 9. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1929.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

INEGALITAȚI INTRE ELEMENTELE UNUI TRIUNGHIU

de HARALAMB P. IONESCU

In cele următoare îmi propun a stabili mai multe inegalități între elementele unui triunghiu oarecare, servindu-mă de inegalități algebrice evidente, precum și de alte relațiuni cunoscute între elementele unui triunghiu.

1°. Considerând inegalitatea evidentă:

$$(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(-x+y+z)^2 \geqq xy+yz+zx$$

și făcând:

$$x=a=\frac{r_a(r_b+r_c)}{p},\ \ldots \text{ etc.},$$

unde: a, b, c sunt laturile unui triunghiu exprimate în funcție de razele cercurilor exînscrise, avem inegalitatea:

$$(1)\qquad \Sigma r_a^2 r_b^2 \geqq r_a r_b r_c (r_a+r_b+r_c),$$

după mai multe desvoltări și reduceri.

Impărțind cu:

$$r_a r_b r_c,$$

avem:

$$(2)\qquad \frac{r_a r_b}{r_c}+\frac{r_b r_c}{r_a}+\frac{r_c r_a}{r_b} \geqq r_a+r_b+r_c$$

Dacă în (1) ținem seama de relațiile:

$$(a_1)\qquad \frac{S^2}{r}=r_a r_b r_c \qquad \text{și} \qquad (a_2)\qquad 2S^2=R h_a h_b h_c$$

avem inegalitatea:

$$(3)\qquad 2r(r_a^2 r_b^2+r_b^2 r_c^2+r_c^2 r_a^2) \geqq R h_a h_b h_c (r_a+r_b+r_c).$$

Ținând seamă că:

$$(a_3)\qquad r_a=\frac{(p-b)(p-c)}{r},\ \ldots \text{ etc.},$$

avem:

$$r_a+r_b+r_c=\frac{p^2+\Sigma ab}{r},$$

iar din (2) și (3) avem:

$$(4)\qquad \frac{r_a r_b}{r_c}+\frac{r_b r_c}{r_a}+\frac{r_a r_c}{r_b} \geqq \frac{p^2+\Sigma ab}{r}, \text{ și:}$$

$$(5)\qquad r_a^2 r_b^2+r_b^2 r_c^2+r_c^2 r_a^2 \geqq R h_a h_b h_c \frac{p^2+\Sigma ab}{2r^2}.$$

Ținând seamă de:

$$(a_4)\qquad h_a=\frac{a \sin B \sin C}{\sin A},\ \ldots, \text{ etc.},$$

și:

$$(a_5)\qquad \frac{S}{2R^2}=\sin A \sin B \sin C,$$

obținem inegalitatea:

$$(6)\qquad s \leqq \frac{4r^2 R(r_a^2 r_c^2+r_b^2 r_c^2+r_c^2 r_a^2)}{abc(p^3+\Sigma ab)},$$

știind apoi că avem:

$$(a_6)\quad 4R=\frac{abc}{S} \qquad \text{și} \qquad (a_7)\quad r_a=p \operatorname{tg}\frac{A}{2},\ \ldots \text{ etc.},$$

avem inegalitatea:

$$(7)\quad p^2 \geqq \frac{ab+bc+ca+p^2}{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^3\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}$$

Dacă în inegalitatea algebrică 1° considerată facem:

$$x=r_a, \qquad y=r_b, \qquad z=r_c,$$

desvoltând şi reducând avem:

(8) $$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geqq p^2,$$

unde ţinând seamă de (a_7) şi de relaţiile:

(a_8) $$\sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = 1 = \sum \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}.$$

obţinem inegalitatea:

(9) $$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}A + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}B + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}C \geqq \sum \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sum \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}.$$

Dacă însă în inegalitatea algebrică considerată în 1° facem:

(a_9) $$x = \sin A = \frac{2 r_a p}{(r_a + r_b)(r_a + r_c)},$$

$$y = \sin B = \frac{2 r_b p}{(r_b + r_a)(r_b + r_c)},$$

$$z = \sin C = \frac{2 r_c p}{(r_b + r_a)(r_c + r_b)},$$

după mai multe transformări avem:

(10) $$4\,\frac{r_a^2 r_b^2 + r_b^2 r_c^2 + r_c^2 r_b^2}{(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)} \geqq \frac{r_a r_b}{r_a + r_b} + \frac{r_b r_c}{r_b + r_c} + \frac{r_a r_c}{r_a + r_c},$$

de unde ţinând seama de relaţia:

(a_{10}) $$\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \quad \text{etc.}$$

(11) $$r_a^2 r_b^2 + r_b^2 r_c^2 + r_c^2 r_a^2 \geqq \frac{1}{8}(r_a + r_b)(r_r + r_c)(r_c + r_a)(h_a + h_b + h_c),$$

după ce pe (10) l-am înmulţit cu 2.

Acum ţinem seamă în membrul 2-lea de $(a_3), (a_6)$ precum şi de relaţia:

(a_{11}) $$p - a = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}, \ldots \text{etc.}$$

avem inegalitatea:

(12) $$r_a^2 r_b^2 + r_b^2 r_c^2 + r_c^2 r_a^2 \geqq \frac{h_a + h_b + h_c}{2 \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\, s\,R.$$

Cunoscând însă relaţiile (a_4) şi (a_7) după mai multe transformări avem inegalitatea:

(13) $$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} \geqq \frac{R\,r}{p^3}\left\{\frac{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}} + \frac{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} + \frac{\cos^3\frac{C}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}\right\}.$$

2°. Fie inegalitatea algebrică evidentă:

$$x^4 + y^4 + z^4 \geqq x\,y\,z\,(x + y + z),$$

în care facem:

(a_{12}) $$x = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}, \ldots \text{etc.}$$

şi după mai multe lucrări avem:

(14) $$\frac{\operatorname{tg}^4\frac{A}{2}\operatorname{tg}^4\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^4\frac{B}{2}\operatorname{tg}^4\frac{C}{2} + \operatorname{tg}^4\frac{C}{2}\operatorname{tg}^4\frac{A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}} \geqq \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2},$$

pe care dacă o comparăm cu (6) după ce am ţinut seamă de (a_7), cantităţile între cari variază produsul tangentelor unghiurilor pe jumătate ale unui triunghiu.

Dacă în inegalitatea algebrică 2° facem:

(a_{14}) $$x = \frac{1}{r_a} = \frac{r}{(p-b)(p-c)}, \ldots$$

avem:

$$(p-a)^4 + (p-b)^4 + (p-c)^4 \geqq \frac{1}{\Sigma(p-a)(p-b)}$$

pe care o împărţim cu 3 şi apoi ţinând seamă de relaţia:

(a_{14}) $$r_a = p\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = (p-c)\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$$

avem:

$$(15)\quad p^6 \sum \frac{r_a^4}{\operatorname{cotg}^5 \frac{A}{2}} \cdot$$

$$\sum \left(a\, r_b \operatorname{cotg} \frac{A}{2} \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + r_a\, r_c \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \right) \geqq 3.$$

Fie inegalitatea algebrică evidentă:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geqq 3,$$

în care facem:

$$x = \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p^2}{(r_v + r_b)(r_a + r_c)}, \ldots \text{ etc.}$$

avem:

$$\Sigma (r_a + r_b)^2 (r_a + r_c) \geqq 3 (r_a + r_b)(r_a + r_c)(r_c + r_a)$$

în care dacă ţinem seamă de (a_3), precum şi de relaţia:

$$(p - a) = \frac{r_c}{\operatorname{cotg} \frac{B}{2}}, \ldots \text{ etc.}$$

obţinem inegalitatea:

$$\frac{\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \cdot r_c\, a}{\operatorname{cotg} \frac{B}{2} \cdot r_b\, c} + \frac{\operatorname{cotg} \frac{B}{2} \cdot r_a\, b}{\operatorname{cotg} \frac{C}{2} \cdot r_c\, a} + \frac{\operatorname{cotg} \frac{C}{2} \cdot r_b\, c}{\operatorname{cotg} \frac{A}{2} \cdot r_a\, b} \geqq 3.$$

4°. Considerăm inegalitatea algebrică evidentă:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqq \frac{9}{x + y + z},$$

în care facem:

$$x = a = \frac{r_a (r_b + r_c)}{p},$$

ţinând tot odată seamă şi de:

$$(a_{15}) \qquad p = \frac{r_a}{\operatorname{tg} \frac{A}{2}} = \frac{r_b}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}} = \frac{r_c}{\operatorname{tg} \frac{C}{2}}$$

avem:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot (r_c + r_b)} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot (r_a + r_c)} + \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot (r_a + r_b)} \geqq \frac{9}{2p}.$$

Această inegalitate comparâud-o cu relaţia (a_{15}) avem:

$$\frac{\operatorname{cotg} \frac{A}{2}}{\left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right)} + \frac{\operatorname{cotg} \frac{B}{2}}{\left(\operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)} + \frac{\operatorname{cotg} \frac{C}{2}}{\left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{te} \frac{B}{2} \right)} \geqq \frac{9}{2}.$$

Dacă în inegalitatea considerată 4° facem:

$$x = h_1 = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A}, \ldots$$

şi ţinem seamă şi de (a_6) avem:

$$(\sin A + \sin B + \sin C) \left(\frac{a}{\sin^2 A} + \frac{b}{\sin^2 B} + \frac{c}{\sin^2 C} \right) \geqq 36\, R,$$

sau în aceleaşi condiţiuni fără însă a ţine seamă (a_4) avem:

$$\sin A + \sin B + \sin C \geqq 9 (\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C).$$

Tot în acest mod se pot stabili un mare număr de inegalităţi între elementele unui triunghiu, precum şi identitaţi între elementele unui triunghiu, bine înţeles pornind dela identităţi algebrice; iar aceste două categorii de relaţii ne dă prilejul comparându-le, să căpătăm un nou număr de inegalităţi, destul de importante.

NOTE MATEMATICE

22. — *Asupra unei teoreme de aritmetică.*

1. Răsfoind „Gazeta Matematică“ (vol. XXIX p. 329) găsesc următoarea teoremă:

Să se arate că dacă indicatorul de ordinul n al lui N *este 1 şi dacă a, b, c, ... sunt factorii primi ai lui* N, *atunci avem*

$$(1) \qquad N \geqq \left(\frac{a\, b\, c \ldots}{(a-1)(b-1)(c-1)} \right)^n$$

(trebue luat semnul $\geqq$ şi nu $\leqq$).

Intr'o altă notă (id. vol. XXX p. 295) d-l *I. Linteș* recunoaște că demonstrația dată nu e riguroasă

Fie

$$N \geqq a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots \varphi_1(N) = a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} c_1^{\gamma_1} \quad \begin{matrix} a < b < c < \ldots \\ a_1 < b_1 < c_1 < \ldots \end{matrix}$$

N și indicatorul său descompuși în factori primi.

D-l *Linteș* se bazează pe inegalitatea:

$$\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc} \geqq \frac{(a_1-1)(b_1-1)(c_1-1)}{a_1 b_1 c_1}.$$

E destul a lua $N=6$ și $N=7$ pentru a vedea că semnul de inegalitate între aceste două cantități este când $<$, când $>$.

Demonstrația este deci greșită.

Inegalitatea (1) se poate scrie

$$(1) \qquad \big(\varphi_1(N)\big)^n \geqq N^{n-1}.$$

D-l *Linteș* dă o a doua demonstrație afirmând că avem chiar

$$(2) \qquad \big(\varphi_1(N)\big)^x \geqq N^{x-1}$$

x fiind mai mare ca oricare din exponenții $\alpha, \beta, \ldots$. și cum:

$$n \geqq \alpha + \gamma + \beta + \ldots.$$

(1) este *a fortiori* adevărat.

Dar și această demonstrație e greșită.

Că proprietatea nu e adevărată de vede imediat. Să scriem (2) sub forma:

$$\left(\frac{\varphi_1(N)}{N}\right)^x \geqq \frac{1}{N},$$

cum $\varphi_1(N) < N$ avem:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\varphi_1(N)}{N}\right)^x = 0,$$

deci x fiind destul de mare inegalitatea e cu siguranță greșită. Din contră e evident că *x fiind destul de mare* avem:

$$(3) \qquad \big(\varphi_1(N)\big)^x \leqq N^{x-1}.$$

Despre (2) putem spune, că e adevărat *x fiind destul de mic.* Inegalitatea (2) se poate scrie:

$$\frac{(a-1)^x}{a^{x-\alpha}} \cdot \frac{(b-1)^x}{b^{x-\beta}} \cdot \frac{(c-1)^x}{c^{x-\gamma}} \ldots \geqq 1,$$

iar (3) se poate scrie:

$$\frac{(a-1)^x}{a^{x-\alpha}} \cdot \frac{(b-1)^x}{(b-1)^x} \cdot \frac{(c-1)^x}{c^{x-\lambda}} \ldots \leqq 1.$$

Fie expresiunea:

$$E = \frac{(k-1)^x}{k^{x-\lambda}},$$

unde $k \geqq 2$, $\lambda \geqq 1$.

Ecuația:

$$\frac{(k-1)^x}{k^{x-\lambda}} = 1,$$

are ca rădăcină:

$$x_1 = \frac{\log k}{\log \frac{k}{k-1}} \lambda.$$

Și avem $E \gtrless 1$ după cum $x \lessgtr x_2$.

Să observăm acum că dacă k crește de la 2 la ∞ expresia:

$$\frac{\log k}{\log \frac{k}{k-1}}$$

crește de la 1 la ∞.

Se poate dar spune că *inegalitatea (2) este cu siguranță adevărată x fiind mai mic sau egal cu cel mai mic din numerile* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

2. Să punem:

$$\varphi_1(N) = N \frac{P_0}{Q_0}$$

$$\varphi_2(N) = \varphi_1(N) \frac{P_1}{Q_1}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\varphi_n(N) = \varphi_{n-1}(N) \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

unde:

$$P_0 = (a-1)(b-1)(c-1)\ldots \qquad Q_0 = abc\ldots$$

$$P_1 = (a_1-1)(b_1-1)(c_1-1)\ldots \qquad Q_1 = a_1 b_1 c_1 \ldots$$

. . . . . .

. . . . . .

Avem atunci:

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

$$\sum_1^n \varphi_i(N) = N\left[\frac{P_0}{Q_0} + \frac{P_0 P_1}{Q_0 Q_1} + \cdots + \frac{P_0 P_1 \ldots P_{n-1}}{Q_0 Q_1 \ldots Q_{n-1}}\right] = N E.$$

D-l *Linteș* afirmă ca probabilă relația:

$$\frac{1}{2} < E < 2$$

Vreau să arat că:

$$0 < E < 2.$$

Și limita inferioară 0 nu se poate înlocui cu nici un alt număr pozitiv.

Observ că orice indicator e *par* (afară de cazul banal $N = 2$, care însă nu face excepție relației), deci:

$$\frac{P_i}{Q_i} < \frac{1}{2} \qquad i = 1, 2, \ldots n-1,$$

avem așa dar:

$$E < \frac{P_0}{Q_0}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) < 2\frac{P_0}{Q_0}.$$

Insă:

$$\frac{P_0}{Q_0} < 1$$

deci:

$$E < 2.$$

Se știe din teoria numerilor că produsul:

$$\Pi\left(1 - \frac{1}{P_m}\right) = \Pi\frac{P_m - 1}{P_m},$$

extins la toate numerile prime e *divergent*, aceasta însemnează că raportul $\frac{P_0}{Q_0}$ poate să devină oricât de mic voim. Mai precis ε fiind un număr pozitiv arbitrar de mic putem găsi un N pentru care:

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

și din (5) avem:

$$E < \varepsilon \qquad \text{c. c. t. d.}$$

Observații: 1°. Nu am ținut de loc seamă de $\varphi_n(N) = 1$, deci n poate fi oricare.

2°. Dacă N este par putem scrie:

$$E < 1$$

căci în acest caz:

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{1}{2}$$

T. POPOVICIU

23. — *O problemă asupra indicatorilor.*

D-l Căpitan *I. Linteș* într'o notă din „Gazeta Matematică" (vol. XXIX p. 48) își propune următoarea problemă:

Există numere de forma A^m *al căror indicator să fie de forma* B^n*?*.

Demonstrația dată e complet greșită și deci rezultatul la care ajunge d-l *Linteș* nu este exact.

Se vede însă că *problema nu poate fi posibilă decât dacă m și n sunt prime între ele presupunând* $m > 1$.

Fie:

$$A = a^\alpha 5^\beta \ldots . l^\omega$$

l fiind cel mai mare factor prim a lui A. Atunci se vede că $\varphi(A^m)$ va avea tot pe l ca cel mai mare factor prim la o putere egală cu $m\omega - 1$.

Pentru ca problema să fie posibilă trebue să putem găsi un număr ω_1 astfel ca:

$$m\omega - 1 = n\omega_1$$
$$\therefore m\omega - n\omega_1 = 1$$

ceeace e imposibil dacă m, n au un factor comun diferit de 1.

Fie m, n, două numere prime între ele cu condiția $m > 1$, putem determina două numere α, β astfel ca:

$$\alpha m - \beta n = 1$$

atunci:

$$\varphi\left((2^n 3^\alpha)^m\right) = (2^m 3^\beta)^n$$

Proprietatea e încă adevărată pentru $m = 1$, după cum arată exemplul:

$$\varphi(2^\alpha 3) = 2^n.$$

T. POPOVICIU

CHESTIUNI DE EXAMEN

ȘCOALA POLITECNICĂ DIN TIMIȘOARA

Examen de fine de an Anul I.

Lucrare scrisă

15 Octombrie 1929

Se dă un cerc de diametru A A'. Fie O centrul cercului și M un punct mobil pe cerc. Dreapta O M și dreapta A' M întâlnesc respectiv în C și B tangenta în A la cerc.

Paralelele duse din B şi C la A A' întâlnesc pe O M şi A' M respectiv în P şi Q. Se cere să se găsiască şi să se construiască locul geometric al punctelor P şi Q.

Timp acordat: 2 ore.

BIBLIOGRAFIE

1. Gazeta Matematică. An. XXXV. No. 2, Octombrie 1929. Sur des théorémes de *Neuberg* et de *Gob*, par *V. Thébault*. Asupra ecuaţiei de gradul al treilea, de *Petre Sergescu*. Inegalităţi trigonometrice, de *Nicolae O. Zaharia*.

2. *Rodolphe Raclis*. Une formule sommatoire. (Extrait des Comptes rendus, p. 433, 1929).

PROBLEME REZOLVATE

803. — *Să se găsească cubul perfect de şase cifre, astfel ca suma cifrelor să ne dea numărul format de cifra a doua şi a cincea şi care număr să fie un cub perfect; cifra a treia scrisă după cifra patra să formeze un patrat perfect, iar suma între cifrele întâia, a patra şi a şasea să fie egală cu numărul format de cifrele a treia şi a cincea.*

TRAIAN MARINEANU

Fie $a\,b\,c\,d\,e\,f$ cubul cerut. Conform enunţului:

$$a+b+c+d+e+f=b\,e=k^3$$

$$d\,c=k_1^2$$

$$a+d+f=c\,e.$$

$b\,e$ fiind cel mult 54 şi fiind şi cub perfect, nu poate fi de cât 01, 08, 27.

$b\,e$ nu poate fi 01 sau 08, căci a ar fi zero, rămâne deci $b\,c=27$, adică:

$$b=2 \quad e=7.$$

Atunci relaţiile de mai sus devin:

$$a+c+d+f=18$$

$$d\,c=k_1^2$$

$$a+d+f=c\,7.$$

Scăzând ultima relaţie din prima, deducem:

$$c=18-c\,7,$$

ceiace ne impune să luăm:

$$c=1.$$

Atunci rămân relaţiile:

$$d\,1=k_1^2$$

$$a+d+f=17.$$

Din prima deducem, $d=0$ sau $d=8$.

Dacă luăm $d=0$, rezultă, $a+f=17$, adică:

$$a=9, \quad f=8 \quad \text{sau} \quad a=8, \quad f=9.$$

Dacă $d=8$, atunci $a+f=9$. deci:

$$a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

$$f=8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

Conchidem din cele de mai sus că cubul căutat se găseşte printre numerile:

921078	321876	721872
821079	421875	821871
121878	521874	921870.
221877	621873	

Dintre aceste numere numai 421875 este cub şi formează singura soluţie a problemei:

$$421875=75^3.$$

Soluţii date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic Milit. Iaşi), *Bidoianu I. Adrian* (lic. Oltenita), *Boerescu P. George* (lic. Oltenita), *Codreş I. Elorea* (lic. Milit. Craiova), *Crivăţ I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab Bucureşti), *Cristache M. Grecu* (lic. Oltenita), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ioanitescu D-tru* (lic. Milit. Iaşi) *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Ionescu Gh. Ioan* (lic. Milit. Tg-Mureş), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Mereuţă Emil* (lic. Piatra-Neamţ), *Mihăileanu Nicolae* (lic. Constanţa), *Mocănescu Cr. Ioan* (lic. Târgovişte), *Patron M.* (lic Milit. Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita) şi *Popescu Gh.* (lic. Milit. Iaşi).

Au mai trimes soluţii, d-nii: *Cincilian Agop* (Câmpina), *Ionescu Iulian* (lic. Milit. Iaşi) şi *Scarlat D.* (Şc. Navală).

806. — *Dându-se triunghiul oarecare* A B C, *dintr-un punct* M *al medianei* $B B_1$ *se duce o paralelă* D E *la latura* A C. *Fie* N *punctul de întâlnire al dreptelor* A E *şi* C D. *Paralelele duse din* B_1 *la laturile* A B *şi* B C *intersectează dreptele* A N, A M, C N *şi* C M *respectiv în punctele* G, A_1, F *şi* C_1.

1°. Triunghiul $A_1 B_1 C_1$ *e asemenea cu* A B C.

2°. $B B_1$ *este şi mediana triunghiului* $A_1 B_1 C_1$.

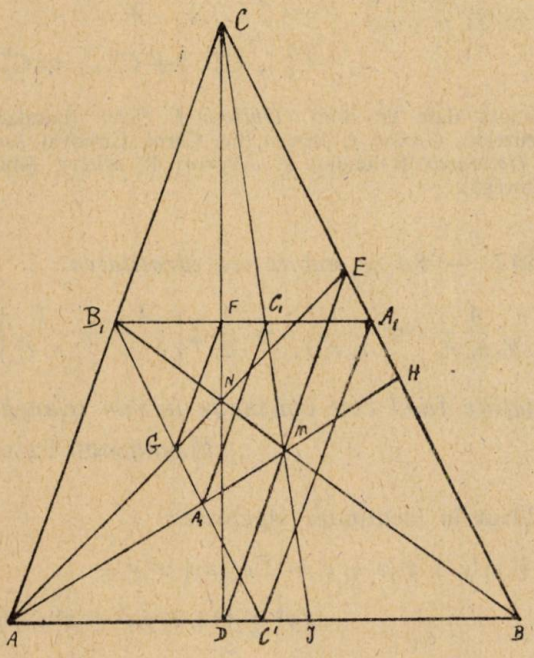
3°. Dreapta F G *e paralelă cu* D E.

ROMAN I. ION

Ne bizuim pe următoarea teoremă pentru demonstrarea problemei 806:

Intr-un trapez, dreapta care unește mijloacele diagonalelor este paralelă cu laturile paralele.

1° Fie A' și C' mijloacele laturilor BC și AB. Paralelele B_1C_1 la AB și B_1A_1 la BC trec respectiv prin A' și C' din cauză că B_1 este mijlocul lui AC și tot din acea cauză A_1 și C_1 vor fi



mijloacele lui AH și CI în care H e intersecția lui AM cu BC iar I intersecția lui CM cu AB. Dar atunci A_1 și C_1 sunt mijloacele diagonalelor AH și CI în patrulaterul $AIHC$ care este trapez căci BB_1 fiind mediană, toate dreptele ca IH sunt paralele cu AC. Aceasta se poate demonstra ușor observând că din triunghiurile CIA și MID care au $AC \parallel DM$ se scoate

$$(1) \qquad \frac{DI}{AI} = \frac{MD}{AC}$$

iar din CHA și MHE se scoate

$$(2) \qquad \frac{HE}{CH} = \frac{ME}{AC}$$

Dar

$$MD = ME$$

și comparând (1) cu (2) rezultă

$$\frac{DI}{AI} = \frac{HE}{CH}$$

care arată că HI e paralelă cu AC.

Cu aceasta sa dovedit că A_1C_1 e paralelă cu HI deci cu AC. Cum A_1B_1 și B_1C_1 sunt paralele cu BC și AB prin construcție urmează cu ABC și $A_1B_1C_1$ sunt asemenea.

2°. BB_1 trece evident prin mijlocul lui $A'C'$ și va fi mediană în triunghiul $A'B_1C'$ și în ori ce triunghiu ca $A_1B_1C_1$ în care A_1B_1 e paralelă cu AC deci și cu $A'C'$.

3° F și G fiind pe B_1A' și B_1C' sunt mijloacele diagonalelor CD și AE din trapezul $ADEC$. Deci FG este paralelă cu DE.

Au rezolvat problema cu ajutorul triunghiurilor asemeni d-nii: *Boerescu P. G.* (Lic. Oltenița), *Carp I.* (Absolvent Lic. Chișinău), *Fericeanu Ș.* (Student București), *Hamerak C.* (Caransebeș), *Ionescu-Țiu D. C.* (Șc Militară de geniu), *Ionescu P. H.* (Lic. Oltenița), *Lupescu C.* (Lic. Roman), *Marineanu T.* (Student, București), *Mihalcea I. E.* (Student), *Șchiopulescu M. I.* (Lic. Caracal), *Schuller D.*, *Șerban-Ulmeni D.*, *Popa Gh. I.* (Lic. Oltenița), *Vâlceanu J.* (Absolvent, Lic. Tg-Jiu).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București) și *Rusu Liviu* (Șc. Polit. Timișoara).

810. — *Se cer patratele de șase cifre astfel ca numărul format de cifrele întâia, a patra și a cincea să fie patratul numărului format din cifrele întâia și a doua, numărul format de ultimele două cifre să fie patratul cifrei a treia, iar numărul format de cifrele a treia, a doua și a șasea să fie patratul numărului format de cifrele a doua și a treia și în același timp cubul ultimei cifre.*

TEODOR G. BACIU

Fie $abcdef$ numărul cerut. Conform enunțului avem:

$$ade = (ab)^2, \quad ef = c^2, \quad cbf = (bc)^2 = f^3.$$

Pentru f^3, putem lua:

$$125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729.$$

Dintre acestea numai 729 este și patrat perfect, $729 = 27^2$.

Din ultima relație rezultă:

$$f = 9, \quad b = 2, \quad c = 7.$$

Din relația, $ef = c^2$, deducem:

$$e = 4.$$

Mai rămâne să satisfacem prima relaţie, anume:

$$a\,d\,4 = (a\,2)^2.$$

Nu putem lua, decât $a = 1$, avem:

$$1\,d\,4 = 12^2 = 144,$$

deci:

$$d = 4.$$

Numărul $a\,b\,c\,d\,e\,f$, este deci, 127449 şi fiind şi patrat perfect:

$$127449 = 357^2,$$

constitue soluţia problemei.

Soluţii date de d-nii: *Aldea N.* (absolvent M-rea Dealu), *Almăjan Petru* (bacalaureat, Caransebeş), *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Bidoianu I. Adrian* (lic. Oltenița), *Boerescu P. George* (lic. Oltenița), *Carp Ignat* (absolvent), *Capră Alexandru* (Dorohoi), *Crivăţ I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Georgescu T. Petru* (lic. T.-Severin), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit de Geniu), *Lupescu C-tin* (lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mereuţă Emil* (lic. P.-Neamţ), *Milea G. E.* (absolvent, R.-Sărat), *Mocănescu Cr. Ioan* (lic. Târgovişte), *Petrovici D-tru* (student), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Russu Liviu* (Şc. Polit., Timişoara), *Secăroiu D-tru* (absolvent, Braşov), *Şerban Ulmeni* (lic. Oltenița), *Schuller David* (absolvent, Bacău) şi *Ţiucra Mircea* (absolvent, lic. Timişoara).

Au mai trimis soluţii, d-nii: *Anghianu Mihail* (lic. Oltenița). *Brotmann I.* (bacalaureat, Bucureşti), *Cristache M. Grecu* (lic. Oltenița), *Cincilian Agop* (Câmpina), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (student, Bucureşti), *Ioaniţescu Gh. D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Patron M.* (lic. Milit., Iaşi), *Petrică P. Ioan* (Şc. de conductori, Cluj), şi *Teodorescu Stavrache* (lic. Milit., Iaşi).

814. — *Să se stabilească identitatea:*

$$C^3_{p+r} + C^2_{p+r}\,C^1_{q-r} + C^1_{p+r}\,C^2_{q-r} + C^3_{q-r} = C^3_{p+q},$$

unde C^n_m *înseamnă combinări de m obiecte luate câte n.*

V. ALACI

Pornim dela identitatea evidentă:

$$(1+x)^{p+r}(1+x)^{q-r} = (1+x)^{p+q},$$

care desvoltată ne dă:

$$(1)\qquad (1 + C^1_{p+r}x + \ldots + C^n_{p+r}x^n + \ldots$$

$$\ldots + C^{p+r}_{p+r}x^{p+r})(1 + C^1_{q-r}x + \ldots + C^n_{q-r}x^n + \ldots$$

$$\ldots + C^{q-r}_{q-r}x^{q-r}) = (1 + C^1_{p+q}x + \ldots$$

$$\ldots + C^n_{p+q}x^n + \ldots + C^{p-q}_{p-q}x^{p+q}).$$

Identificând coeficienţii lui x^3 din ambii membri, obţinem:

$$C^3_{p+r} + C^2_{p+r}\,C^1_{q-r} + C^1_{p+r}\,C^2_{q-r} + C^3_{q-r} = C^3_{p+q},$$

adică tocmai identitatea cerută.

Observare. Dacă în identitatea (1) egalăm coeficienţii lui x^n din ambii membrii, obţinem identitatea mai generală:

$$C^n_{p+r} + C^{n-1}_{p+r}\,C^1_{p-r} + C^{n-2}_{p+r}\,C^2_{q-r} + \ldots$$

$$\ldots + C^1_{p+r}\,C^{n-1}_{q-r} + C^n_{q-r} = C^n_{p+q}.$$

Soluţii date de d-nii: *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu P. Haralamb* (Oltenița) şi *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti).

817. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{4}{h_a\,h_b\,h_c} = \frac{1}{r_a\,r_b\,r_c} + \frac{1}{2}\,\Sigma\left(\frac{1}{r_a^2\,r_b} + \frac{1}{r_a\,r_b^2}\right),$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

MARINEANU TRAIAN

Dacă în identitatea algebrică:

$$(x+y)(y+z)(z+x) = 2\,x\,y\,z + x^2\,y +$$

$$x\,y^2 + y^2\,z + y\,z^2 + z^2\,x + z\,x^2,$$

luăm:

$$x = \frac{1}{r_a},\quad y = \frac{1}{r_b},\quad z = \frac{1}{r_c}$$

şi ţinem seamă, că:

$$\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{2}{h_a}\ldots,$$

obţinem:

$$\frac{8}{h_a\,h_b\,k_c} = \frac{2}{r_a\,r_b\,r_c} + \Sigma\left(\frac{1}{r_b\,r_a^2} + \frac{1}{r_a\,r_b^2}\right).$$

Dacă aci împărţim cu 2 ambii membri, obţinem identitatea cerută.

Soluţii date de d-nii: *Carp Ignat* (Chişinău), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, Bucureşti), *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti), *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit. Timişoara), *Vladimir i. Crivăţ* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti) şi o soluţie neiscălită.

819. — *Se cere suma:*

$$S = 101 + 2002 + 30003 + \ldots + n00\ldots00\,n.$$

JUSTIN N. VALCEANU

Putem scri evident;

$$S = (1+2+3+\ldots+n) + 10^2 + 2\cdot 10^3 + 3\cdot 10^4 + \ldots$$

$$\ldots + n\,10^{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + 100(1 + 2\cdot 10 +$$

$$3\cdot 10^2 + \ldots + n\,10^{n-1}).$$

Dacă însemnăm:

$$S_n = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1},$$

$$S_{n-1} = 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1},$$

$$\ldots S_2 = 10^{n-2} + 10^{n-1},\quad S_1 = 10^{n-1}.$$

atunci putem scri încă:

$$S = \frac{n(n+1)}{2} + 100\,(S_n + S_{n-1} + \ldots + S_1) =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + 100\left(\frac{10^n - 1}{9} + \frac{10^n - 10}{9} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{10^n - 10^{n-1}}{9}\right) = \frac{n(n+1)}{2} +$$

$$\frac{100}{9}\,[n\cdot 10^n - (1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^n)] =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{100}{9}\left(n\cdot 10^n - \frac{10^n - 1}{9}\right) =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{100}{81}\,[1 + 10^n(9n-1)].$$

Observare. Suma:

$$1 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10^2 + \ldots + n\cdot 10^{n-1},$$

se mai poate calcula astfel;

Considerăm progresia geometrică și suma ei:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

pe care s'o derivăm în raport cu x, avem:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n\,x^{n-1} =$$

$$\frac{(n+1)\,x^n(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2},$$

care pentru $x = 10$, devine:

$$1 + 2\cdot 10 + 3\cdot 10^2 + \ldots + n\cdot 10^{n-1} =$$

$$\frac{1 + 10^n(9n-1)}{81},$$

Solutii date de d-nii: *Aldea N.* (absolvent, M-rea Dealu), *Carp Ignat* (Chișinău), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Dănciulescu Gr. Virgil* (Șc. Politech., București), *Derenbaum M.* (lic. Tighina), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, lic. Spiru Haret, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. milit. de Geniu), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Marineanu Traian* (student, București), *Murăroiu I.* (bacalaureat, Brașov), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de conductori technici, Cluj), *Petrovici D.* (student) *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Schuller David* (absolvent, Bacău) și *Șerban-Ulmeni* (lic. Oltenița).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Almăjan Petru* (Caransebeș), *Dăscălescu Șt. Hristache* (student, București), *Hamerak Carol* (Caransebeș) și *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița).

824. — *Să se stabilească identitățile:*

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} + \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right)} =$$

$$\frac{3\sin(2\alpha_1 + \alpha)}{\sin 3\alpha_1},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}\left[\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right)}\right] +$$

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{3\sin(\alpha_1 + 2\alpha)}{\sin 3\alpha_1}.$$

V. ALACI

Ținem seamă de relațiile:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

şi notând primii membrii ai identităţilor date prin E şi E_1 făcând desvoltările avem:

$$E = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} + \frac{\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha_1 - \sqrt{3}\cos\alpha_1} + \frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha_1 + \sqrt{3}\cos\alpha_1}$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} + \frac{2\sin\alpha\sin\alpha_1 - 6\cos\alpha\cos\alpha_1}{\sin^2\alpha_1 - 3\cos^2\alpha_1} =$$

$$\frac{3\sin\alpha(\sin^2\alpha_1 - \cos^2\alpha_1) - 3\sin 2\alpha_1\cos\alpha}{4\sin^3\alpha_1 - 3\sin\alpha_1} =$$

$$\frac{3(\sin\alpha\cos 2\alpha_1 + \sin 2\alpha\cos\alpha)}{3\sin\alpha_1 - 4\sin^3\alpha_1} = \frac{3\sin(2\alpha_1 + \alpha)}{\sin 3\alpha_1}.$$

Astfel prima identitate este stabilită.

Trecem la primul membru al identităţii a 2-a, şi avem:

$$E_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}\left(\frac{\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha_1 - \sqrt{3}\cos\alpha_1} + \frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}{\sin\alpha_1 + \sqrt{3}\cos\alpha_1}\right) + \frac{\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha_1 - 3\cos^2\alpha_1} =$$

$$\frac{\sin\alpha(2\sin\alpha\sin\alpha_1 - 6\cos\alpha\cos\alpha_1) + \sin^2\alpha\sin\alpha_1 - 3\sin\alpha_1\cos^2\alpha}{\sin\alpha_1(4\sin^2\alpha_1 - 3)} =$$

$$\frac{3\sin^2\alpha\sin\alpha_1 - 3\sin 2\alpha\cos\alpha_1 - 3\sin\alpha_1\cos^2\alpha}{4\sin^3\alpha_1 - 3\sin\alpha_1} = \frac{3(\sin\alpha_1\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha)}{3\sin\alpha_1 - 4\sin^3\alpha} = \frac{3\sin(\alpha_1 + 2\alpha)}{\sin 3\alpha_1}.$$

Avem astfel stabilită şi identitatea a 2-a.

Soluţii analoage date de d-nii: *Antonescu Aurel* (absolvent), *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Derenbaun M.* (lic. Tighina), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Calaţi), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Hamerak Carol* (Caransebeş), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Millea Ene* (absolvent, R-Sărat), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti), *Petrovici D-tru* (student), *Rusu Liviu* (Şc. Polit. Timişoara), *Schuller David* (absolvent, Bacău), *Secăroiu D-tru* (absolvent, Braşov) şi *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit. Timişoara).

Altă soluţie dată de d-l *Vâlceanu N. Justin* (Şc. Polit. Timişoara).

Să formăm ecuaţia algebrică ale cărei rădăcini sunt:

$$x = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Folosim metoda din articolul *„O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice“*, R. M. T., vol. VIII, No. 9.

Putem scri:

$$x = \frac{i\sin\alpha\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) - \cos\alpha\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)}{i\sin\alpha_1\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} + e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) - \cos\alpha_1\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)}$$

Notând;

$$e^{\frac{ik\pi}{n}} = t,$$

avem încă:

$$x = \frac{i\sin\alpha(t^2+1) - \cos\alpha(t^2-1)}{i\sin\alpha_1(t^2+1) - \cos\alpha_1(t^2-1)}.$$

De aci deducem:

$$\left[x(i\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1) - (i\sin\alpha - \cos\alpha)\right]t^2 =$$

$$(i\sin\alpha + \cos\alpha) - x(i\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1$$

$$\therefore\ t^2 = \frac{(i\sin\alpha + \cos\alpha) - (i\sin\alpha_1 + \cos\alpha_1)x}{(i\sin\alpha_1 - \cos\alpha_1)x - (i\sin\alpha - \cos\alpha)} =$$

$$\frac{e^{i\alpha} - e^{i\alpha_1}x}{e^{-i\alpha} - e^{-i\alpha_1}x}.$$

Ridicând la puterea n^a şi observând că:

$$t^{2n} = e^{2ik\pi} = 1,$$

avem ecuaţia:

$$(e^{i\alpha_1}x - e^{i\alpha})^n - (e^{-i\alpha_1}x - e^{-i\alpha})^n = 0.$$

Pentru $n = 3$, avem:

$$(e^{3i\alpha_1} - e^{-3i\alpha_1})x^3 - 3(e^{i(2\alpha_1+\alpha)} - e^{-i(2\alpha_1+\alpha)})x^2 +$$

$$3(e^{i(\alpha_1+2\alpha)} - e^{-i(\alpha_1+2\alpha)})x - (e^{3i\alpha} - e^{-3i\alpha}) = 0.$$

Impărțind cn $2i$ și ținând seamă de relațiile lui *Euler*, obținem ecuația:

$$(1)\quad \sin 3\alpha_1 \cdot x^3 - 3(2\alpha_1 + \alpha)\cdot x^2 + 3\sin(\alpha_1 + 2\alpha)\cdot x - \sin 3\alpha = 0,$$

cu rădăcinele:

$$(2)\qquad x = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{3}\right)}, \quad (k = 0,\ 1,\ 2).$$

In virtutea relațiilor între rădăcini și coeficienți, putem scri imediat privind ecuația (1) cu rădăcinele (2):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} + \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{2\pi}{2}\right)} = \frac{3\sin(2\alpha_2 + \alpha)}{\sin 3\alpha_1}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}\left[\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right)}\right] + \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{3\sin(\alpha_1 + 2\alpha)}{\sin 3\alpha_1}.$$

Am obținut astfel identitățile cerute.

825. — *Să se stabilească relația:*

$$\sum \frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{R+r}{R},$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

PETRE I. GHISOIU

In virtutea relațiilor cunoscute:

$$a = 2R\sin A, \quad b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C,$$

putem scri succesiv:

$$\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2R(\sin B + \sin C)}{2R\sin A}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin^2\frac{A}{2} = \cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} =$$

$$\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2} = \frac{1}{2}(\cos B + \cos C).$$

Atunci rezultă:

$$(1)\quad \sum\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2} = \cos A + \cos B + \cos C =$$

$$2\cos^2\frac{A}{2} + 2\cos^2\frac{B}{2} + 2\cos^2\frac{C}{2} - 3.$$

Dar cum se cunoaște că:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{r_b + r_c}{4R}}, \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{r_a + r_c}{4R}},$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{r_a + r_b}{4R}},$$

relația (1) devine:

$$(2)\quad \sum\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{r_a + r_b + r_c}{R} - 3.$$

Cum este cunoscută încă relația:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r,$$

relația (2) devine:

$$\sum\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{A}{2} = \frac{4R+r}{R} - 3 = \frac{R+r}{R},$$

adică tocmai relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Băcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Băcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Brotman I.* (bacalaureat, București), *Coșniță Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Hamerak Carol* (Caransebeș), *Ionescu P. Hara-*

Iamb (lic. Oltenița), *Marineanu Traian* (student, București), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Murărolu I.* (bacalaureat, Brașov), *Negrea A. Mircea Leonte* (student București), *Petrovici D-tru* (student), *Țiucra Mircea* (Șc. Polit. Timișoara) și *Vâlceanu N. Iustin* (Șc. Polit. Timișoara.

Observare. Autorul ne-a înștiințat că această problemă se găsește rezolvată și în „*Gazeta Matematică*“ vol. XXVIII p. 478.

PROBLEME PROPUSE

857. — Se cere patratul de patru cifre așa ca numărul format de primele două cifre și cel format de ultimele două cifre să fie numere cu cifre consecutive.

GEORGE P. BOERESCU

858. — Fie p un număr prim mai mare de cât 5. Să se arate că, dacă $2p+1$ nu este prim, numărul $2p$ nu poate fi un indicator, adică nu există nici un număr N astfel ca, $\varphi(N) = 2p$.

TIBERIU POPOVICI

859. — Se unesc vârfurile A și C ale unui paralelogram A B C D, cu mijloacele laturilor opuse, aceste mijloace fiind însemnate cu a, b, c, d. Intersecția dreptelor C d cu A c și C a cu A b fiind respectiv M, M'; iar a dreptelor M c cu M' b și M' a cu M d fiind m, m', să se arate că:

1°. Punctele B, M, M', D și punctele A, m', m, C sunt respectiv colineare.

2°. Patrulaterele a M c M'; b M' d M; M m M' m' sunt paralelograme.

3°. Triunghiurile din grupele: I. A d M', M C b; II. M' c C, A a M; III. M' D d, M B b; IV. M B a, M' D c, sunt egale.

ION MARGINEANU

860. — Se consideră un triunghiu A M B înscris în cercul O. Pe latura A M se iau două segmente $\overline{AP}$ și $\overline{AP'}$ egale cu latura B M.

Să se găsească și să se studieze locul punctelor P și P' când M descrie cercul O.

OVIDIU ȚINO

861. — Dacă a și b sunt numere reale, $a < b$, să se demonstreze:

$$a < \frac{81}{256} \cdot \frac{(b-a)^4}{\left(\sqrt[4]{b^3} - \sqrt[4]{a^3}\right)^4} < b.$$

Să se verifice în cazul particular $a = 1$ $b = 2$.

V. ALACI

862. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^{2n} + y^{2n} + x^n(y^n + 1) + y^n(x^n + 1) = a \\ x^{3n} + y^{3n} = b. \end{cases}$$

I. MURAROIU

863. — Să se demonstreze că ecuația;

$$4 + 81x^2 = 10y^2,$$

nu admite soluțiuni în numere întregi.

COL. GH. BUICLIU

864. — Care din expresile:

$$E_1 = (1 - x^2)(x^2 + x + 1)$$
$$E_2 = (1 + x)^2(x^2 - x + 1)$$

este mai mare când x variază și în ce intervale.

ION PROTOPOPESCU

865. — Să se rezolve ecuația:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos x + 1}{\sin x - 1}$$

HARALAMB P. IONESCU

TABEL

De candidaţii reuşiţi la examenul de admitere în anul pregătitor, în ordinea clasificaţiei

(21 Octombrie 1929).

1. Ghilezan A. Aurel Lic. Timişoara
2. Macarie C. Eugeniu „ Focşani
3. Antonescu G. Radu „ Timişoara
4. Iustian A. Viorel „ Tg. Mureş
5. Ţiucra P. Mircea „ Timişoara
6. Arsenie I. Mihail „ Galaţi
7. Cacovean N. Vasile Şc. Cond. Technici Cluj
8. Jecov Ath. Ioan Lic. Tulcea
9. Turcu C. Victor Şc. Cond. Lucrări Publice Cluj
10. Micu Gh. Aug. Liviu Lic. Dej
11. Chiu A. Trifu „ Timişoara
12. Ropcean V. Ioan „ Câmpulungul Mold.
13. Stamatelatos P. Gh. „ Cetatea Albă
14. Calotescu R. Traian „ Ploeşti
15. Rusul I. Alexei „ B. P. Haşdeu Chişinău
16. Ovezea F. Vasile „ Brăila
17. Cimponeriu I. Gh. „ Dej
18. Cristea Gh. Simion „ Sighetul Marmaţiei
19. Georgescu T. Petre „ Turnu Severin
20. Jeba C. Constantin „ Lugoj
21. Ulmanu I. Eduard „ Internat Iaşi
22. Cononov P. Nicolae „ Alex. Donici Chişinău
23. Pupezescu Gh. Ioan „ Câmpina
24. Chira I. Aurel „ Dej
25. Ghiţă T. Ioan „ Brăila
26. Smorjevschi T. M. „ Alecu Rusu Chişinău
27. Sgândăr C. Gheorghe „ Turnu Severin
28. Suteu V. Vasile „ Tg. Mureş
29. Bimbulov P. Nicolae „ Cetatea Albă
30. Nazlâmov A. A-dru „ Bolgrad
31. Varga E. Ioan „ Făgăraş
32. Oelze F. Emil „ Câmpina
33. Rentea V. Ioan „ Deva
34. Arseni N. Nicolae „ Bacău
35. Dubyk S. Leon „ Cernăuţi
36. Gubici P. Pavel „ Alecu Rusu din Chişinău
37. Jeba I. Ioan „ Lugoj
38. Nicolau M. Mihaiu „ Internat Iaşi
39. Panţu N. Lucian „ Giurgiu
40. Tăureanu V. Nicolae „ Cetatea Albă
41. Gherman O. Vasile Şc. Cond. Technici Cluj
42. Rübl I. Iosif Lic. Sighetul Marmaţiei
43. Diaconescu A. Savel „ B. P. Haşdeu Chişinău
44. Ehri E. Enric „ German de Stat Timişoara
45. Spevac C. Carol Şc. Cond. Technici Cluj
46. Zoiade Gr. Grigore Lic. Cluj
47. Bărbănţan N. Ioan „ Greco-catolic român Blaj
48. Culic S. Grigore „ Careii Mari
49. Gonciarov I. Teodor Şc. Cond. Lucr. Publ. Cernăuţi
50. Rispolojenschi A. N. Lic. Cetatea Albă
51. Christodorescu C. Gh. Şc. Sup. de Arte şi Meserii Buc.
52. Haralambie N. D. Lic. Ploeşti
53. Andreescu A. A-dru „ Timişoara
54. Groza V. Pompiliu Lic. Arad
55. Man I. Ioan „ Titu Maiorescu Aiud
56. Spirkan V. Janvier „ confes. german din Tarutino
57. Cegolea S. Anatolie „ Alecu Rusu din Chişinău
58. Knizsek C. Francisc „ Romano-catolic Cluj
59. Demeter M. Ştefan „ ref. Bethlen Aiud
60. Iotta D. Mihail Barbu „ Turnu Severin
61. Marcu G. Ioan Aurel „ Deva
62. Ţişevschi E. A-dru „ Tighina
63. Vesa R. Viliam „ Deva
64. Borşeiu N. Adam „ Deva
65. Bozdog D. Emil „ Alba Iulia
66. Sârbu Gh. Gheorghe „ Galaţi
67. Vlasov V. Andrei „ Cetatea Albă
68. Dragoş V. Valentin „ Gherla
69. Perin M. Alexandru „ Piarist Timişoara
70. Barta F. Alexandru „ Braşov
71. Circo Z. Alexandru „ Ştefan cel Mare Tighina
72. Da Rin M. Artur „ Deva
73. Furca I. Emeric „ Petroşani
74. Roman P. Gheorghe Şc. Cond. Technici Cluj
75. Trofimov L. Eusevie Lic. Alecu Rusu Chişinău
76. Boca V. Vasile „ Turda
77. David I. Lucean „ Deva
78. Tonegaru D. C-tin „ Cernăuţi
79. Ghercec D. Iosif „ Timişoara
80. Marşieu C. Teodor „ Arad
81. Pop I. Iustin Seminarul Pedag. Univ. Cluj
82. Diaconescu D. D-tru Lic. Tecuci
83. Lászlóffy Aladar „ Turda
84. Martzy A. Augustin Şc. Sup. de Comerţ Timişoara
85. Tofan P. Tudor Seminarul Pedag. Univ. Cluj

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 DECEMBRIE 1929 No. 10.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI ASUPRA UNOR CLASE DE ECUATIUNI ALGEBRICE CU RADACINI TRIGONOMETRICE.
2. NOTE MATEMATICE, 24.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 797, 822. 826, 834.
5 PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Romaneasca"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

ANUL IX — NO. 10. TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1929.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

ASUPRA UNOR CLASE DE ECUAȚIUNI ALGEBRICE CU RADACINI TRIGONOMETRICE

de V. ALACI

Despre acest subiect, m'am ocupat în câteva articole[1]. Am expus două metode diferite, pentru construirea unor astfel de ecuațiuni. Voesc a expune încă o metodă, ce va reeși din felul cum vom soluționa problemele ce urmează. In urmă vom învedera alte clase importante de ecuațiuni și aplicații asupra lor.

§ 1.

1. *Să se formeze ecuația algebrică, cu rădăcinele:*

$$(1)\qquad x=\frac{a+b\,\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}}{a_1+b_1\,\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}},\quad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

unde a, b, a_1, b_1 *sunt niște constante, astfel ca:*

$$\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}\neq-\frac{a_1}{b_1},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1).$$

Pentru aceasta considerăm ecuațiunea binoamă:

$$(2)\qquad X^n=1,$$

cu rădăcinele:

$$(3)\qquad X=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=$$

$$\frac{\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}}{\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}}{1-i\,\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}},$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1),\quad (i=\sqrt{-1}).$$

Cum din (1) deducem ușor:

$$\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}=\frac{a-a_1x}{b_1x-b},$$

înlocuind în (3), găsim:

$$X=\frac{b_1x-b+i(a-a_1x)}{b_1x-b-i(a-a_1x)}=\frac{(b_1-a_1i)x-(b-ai)}{(b_1+a_1i)x-(b+ai)}.$$

Substituind această valoare în (2), obținem ecuația căutată:

$$(4)\qquad \left[\frac{(b_1-a_1i)x-(b-ai)}{(b_1+a_1i)x-(b+ai)}\right]^n=1,$$

ale cărei rădăcini sunt date de (1).

Observare. In (4), vedem că coeficienții lui x și termenii liberi dela numărător și numitor sunt numere imaginare, conjugate două câte două, dacă a, a_1, b, b_1 sunt reali.

Cazuri particulare. 1°. Dacă în (4) luăm:

$$a=a_1=1,\quad b=-b_1=i,$$

obținem ecuația binoamă:

$$(5)\qquad x^n=1,$$

iar rădăcinele sale (1) corespunzătoare, devin:

$$(6)\qquad x=\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}}{1-i\,\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n}},\quad (k=0,\ 1,\ 2\ldots n-1).$$

2°. Pentru:

$$a=b_1=0,\quad b=a_1=1,$$

ecuația (4) devine:

$$(7)\qquad (1-ix)^n-(1+ix)^n=0,$$

iar rădăcinele sale (1), sunt:

$$(8)\qquad x=\mathrm{tg}\,\frac{k\pi}{n},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1).$$

1) *Gazeta Matematică*, an. XVIII, No. 11; *Revista Matematică din Timișoara*, an. VIII, No. 9; *Revista Universitară Matematică*, care va apare.

3°. Pentru:

$$a = b_1 = 1, \quad b = a_1 = 0,$$

ecuația (4) devine:

$$(9) \qquad (x-i)^n - (x+i)^n = 0,$$

iar rădăcinele sale (1), sunt:

$$(10) \qquad x = \operatorname{cotg} \frac{k\pi}{n}, \quad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

4°. Tot astfel, din (4) putem găsi ecuația:

$$(11) \qquad [(1+i)x-1]^n - [(1-i)x-1]^n = 0,$$

cu rădăcinele:

$$(12) \qquad x = \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

și ecuația:

$$(13) \qquad [(1+i)x-i]^n - [(1-i)x+i]^{(n)} = 0,$$

cu rădăcinele:

$$(14) \qquad x = \frac{\cos \frac{k\pi}{n}}{\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

2. *Să se formeze ecuația algebrică, cu rădăcinele:*

$$(15) \qquad x = \frac{a + b\cos\frac{k\pi}{n} + c\sin\frac{k\pi}{n}}{a_1 + b_1\cos\frac{k\pi}{n} + c_1\sin\frac{k\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots 2n-1),$$

unde a, b, c, a_1, b_1, c_1 sunt niște, constante, astfel ca:

$$a_1 + b_1\cos\frac{k\pi}{n} + c_1\sin\frac{k\pi}{n} \neq 0, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots 2n-1).$$

Luăm ecuația binoamă:

$$(16) \qquad X^{2n} = 1,$$

cu rădăcinele:

$$(17) \qquad X = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots 2n-1)$$

și exprimăm rădăcinele X, în funcție de x.

Pentru aceasta observăm că relațiile (15) și (17), se pot scri:

$$\begin{cases} (b - b_1 x)\cos\frac{k\pi}{n} + (c - c_1 x)\sin\frac{k\pi}{n} = a_1 x - a \\ \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} = X. \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem în raport cu, $\cos\frac{k\pi}{n}$ și $\sin\frac{k\pi}{n}$, avem:

$$\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{(a_1 x - a)i - (c - c_1 x)X}{(b - b_1 x)i - (c - c_1 x)},$$

$$\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{(b - b_1 x)X - (a_1 x - a)}{(b - b_1 x)i - (c - c_1 x)}.$$

Ridicând la patrat aceste egalități și adunându-le, găsim:

$$\frac{[(c - c_1 x)^2 + (b - b_1 x)^2]X^2 - 2(a_1 x - a)i[(c - c_1 x) - (b - b_1 x)i]X}{[(c - c_1 x) - (b - b_1 x)i]^2} = 1.$$

Simplificând prin:

$$(c - c_1 x) - (b - b_1 x)i,$$

și apoi înmulțind cu i, obținem:

$$[b_1 x - b - (c_1 x - c)i]X^2 - 2(a - a_1 x)X + b_1 x - b + (c_1 x - c)i = 0.$$

De aci deducem:

$$X = \frac{a - a_1 x \pm \sqrt{(a_1 x - a)^2 - (b_1 x - b)^2 - (c_1 x - c)^2}}{b_1 x - b - (c_1 x - c)i}.$$

Substituind această valoare în ecuația (16), obținem ecuația căutată:

$$(18) \qquad \left[\frac{a - a_1 x \pm \sqrt{(a_1 x - a)^2 - (b_1 x - b)^2 - (c_1 x - c)^2}}{b_1 x - b - (c_1 x - c)i}\right]^{2n} = 1,$$

ale cărei rădăcini sunt date de (15).

Această ecuație este de o mare generalitate. Astfel pentru, $a = a_1 = 0$ ea se reduce la ecuația (4) și deci cuprinde și toate cazurile particulare, deduse din (4). Putem avea însă și alte cazuri particulare. (A se vedea „R. M. T.", an. VIII, No. 9).

3. *Să se formeze ecuația algebrică, cu rădăcinele:*

$$(19) \qquad x = e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(a\cos\frac{k\pi}{n} + b\sin\frac{k\pi}{n}\right), \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots 2n-1).$$

Să luăm ecuația binoamă:

$$(20) \qquad X^{2n} = 1,$$

cu rădăcinele:

$$(21) \qquad X = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n} = e^{\frac{ik\pi}{n}}, \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots 2n-1),$$

și să exprimăm rădăcinele X, în funcție de x.

Observăm că relațiile (19) și (21), se pot scri:

$$\begin{cases} a\cos\dfrac{k\pi}{n} + b\sin\dfrac{k\pi}{n} = \dfrac{x}{X} \\ \cos\dfrac{k\pi}{n} + i\sin\dfrac{k\pi}{n} = X. \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem în raport cu, $\cos\frac{k\pi}{n}$ și $\sin\frac{k\pi}{n}$, avem:

$$\cos\frac{k\pi}{n} = \frac{ix - bX^2}{X(ai - b)}, \quad \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{aX^2 - x}{X(ai - b)}.$$

Ridicând la patrat aceste egalități și adunând, obținem:

$$\frac{(b^2 + a^2)X^4 - 2ix(b - ai)X^2}{X^2(b - ai)^2} = 1.$$

Simplificând prin:

$$(b - ai)X^2,$$

găsim:

$$(b + ai)X^2 - 2ix = b - ai.$$

De aci deducem:

$$X^2 = \frac{b - ai + 2ix}{b + ai} = \frac{2x - a - bi}{a - bi}.$$

Substituind această valoare, în ecuația binoamă (20), obținem ecuația căutată:

$$(22) \qquad \left(\frac{2x - a - bi}{a - bi}\right)^n = 1,$$

ale cărei rădăcini sunt date de (19).

Observare. Vedem că ecuația (22) este de gradul n, pe când numărul rădăcinelor sale din (19), sunt $2n$. Aceasta se explică ușor, căci în (19) sunt de fapt numai n rădăcini distincte, pentru $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1$, celelalte reproduc pe cele dintâi.

Cazuri particulare. 1°. Dacă în (22) luăm, $b = 0$, obținem ecuația:

$$(23) \qquad (2x - a)^n = a^n$$

iar rădăcinele sale (19), devin:

$$(24) \qquad x = a\,e^{\frac{ik\pi}{n}}\cos\frac{k\pi}{n}, \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1).$$

2°. Pentru, $a = 0$, ecuația (22) devine:

$$(25) \qquad (2ix + b)^n = b^n,$$

iar rădăcinele sale date de (19), sunt:

$$(26) \qquad x = b\,e^{\frac{ik\pi}{n}}\sin\frac{k\pi}{n}, \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1).$$

3°. Pentru, $a = 1$, $b = i$, (22) devine ecuația binoamă:

$$(27) \qquad x^n = 1,$$

iar rădăcinele sale date de (19), sunt:

$$(28) \qquad x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1).$$

§ 2.

Vom învedera acum o clasă importantă de ecuațiuni, care se pot construi după o regulă simplă, rădăcinele lor toate reale, se pot scri imediat.

Derivatele acestor ecuațiuni, formează încă o clasă tot așa de simplă, și rădăcinele lor corespunzătoare sunt cuprinse într'o aceiași formulă unică ușor de scris.

1. Fie ecuația[1]:

$$1) \quad (e^{i\alpha_1}x - e^{i\alpha})^n - (e^{-i\alpha_1}x - e^{-i\alpha})^n = 0.$$

Desvoltând, avem:

$$(e^{in\alpha_1} - e^{-in\alpha_1})x^n - C_n^1[e^{i[(n-1)\alpha_1+\alpha]} - e^{-i[(n-1)\alpha_1+\alpha]}]x^{n-1} + \ldots + (-1)^n(e^{in\alpha} - e^{-in\alpha} = 0,$$

care în virtutea unei formule cunoscute a lui *Euler*, devine:

$$(2) \quad \sin n\alpha_1 \cdot x^n - C_n^1 \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha] \cdot x^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \sin[\alpha_1+(n-1)\alpha] \cdot x + (-1)^n \sin n\alpha = 0.$$

Sub formă prescurtată, această ecuație se poate scri:

$$(3) \quad (x-1)^{(n)} = 0,$$

unde (n) trebue să ne amintească a înmulți termenii dezvoltării (3), respectiv cu numerile din șirul:

$$(4) \quad \sin n\alpha_1, \quad \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha], \ldots \quad \sin n\alpha.$$

Să găsim direct rădăcinele ecuației (3), (cu toate că după cum am arătat în nota 1, ele s'ar putea scri imediat). In adevăr ecuația (1), echivalentă cu (3), se poate scri:

$$\frac{e^{i\alpha_1}x - e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha_1}x - e^{-i\alpha}} = \sqrt[n]{1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \quad (k=0, 1, 2, \ldots n-1),$$

sau:

$$e^{i\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}x - e^{i\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)} = e^{-i\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}x - e^{-i\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}$$

De aci deducem:

$$x = \frac{e^{i\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}}{e^{i\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)} - e^{-i\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}}.$$

Rezultă deci:

$$(5) \quad x = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{k\pi}{n}\right)}, \quad (k=0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Acestea sunt rădăcinele ecuației, (3).

2. Dacă în ecuația (2), înlocuim α și α_1, respectiv prin:

$$\alpha + \frac{\pi}{2n}, \quad \alpha_1 + \frac{\pi}{2n},$$

și observăm că, $\sin[(n-p)\alpha_1 + p\alpha]$, se înlocuește prin:

$$\sin\left[(n-p)\alpha_1 + p\alpha + \frac{\pi}{2}\right] = \cos[(n-p)\alpha_1 + p\alpha], \quad (p=0, 1, 2, \ldots n),$$

ecuația (2) devine:

$$(6) \quad \cos n\alpha_1 \cdot x^n - C_n^1 \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha] \cdot x + \ldots + (-1)^{n-1} \cos[\alpha_1+(n-1)\alpha] \cdot x + (-1)^n \cos n\alpha = 0,$$

iar rădăcinele ei corespunzătoare deduse din (5), sunt:

$$(7) \quad x = \frac{\sin\left[\alpha - \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]}{\sin\left[\alpha_1 - \frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]}, \quad (k=0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Și această ecuație (6) se poate construi extrem de simplu, căci se poate scri simbolic;

$$(8) \quad (x-1)^{(n)} = 0,$$

unde (n) trebue să ne amintească a înmulți termenii desvoltării (8), respectiv cu numerile din șirul:

$$(9) \quad \cos n\alpha_1, \quad \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha], \ldots \quad \cos n\alpha.$$

Rădăcinele ecuației astfel formate, sunt date de (7).

Observare. Am fi ajuns la aceleași concluzii, dacă porneam dela ecuația:

$$(e^{i\alpha_1}x - e^{i\alpha})^n + (e^{-i\alpha_1}x - e^{-i\alpha})^n = 0.$$

3. Din cele de mai sus rezultă.

Dacă considerăm ecuația:

$$(10) \quad (x-1)^{(n)} = 0,$$

---

1) Această ecuație (1) se poate deduce din ecuația (4) § 1, unde se pun coeficienții sub formă trigonometrică:

$$a + bi = \rho e^{i\alpha}, \quad a_1 + b_1 i = \rho_1 e^{i\alpha_1}.$$

a, b, a_1, b_1 fiind reali. Rădăcinele ei date de (1), § 1, devin:

$$x = \frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{\sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1 + \frac{k\pi}{n}\right)},$$

și în urmă se ia, $\rho = \rho_1$.

atunci (n), ne va aminti să înmulțim termenii desvoltării (10), respectiv cu numerile unuia din șirurile

(11) $\sin n\alpha_1,\quad \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha],\ldots \sin n\alpha$

(12) $\cos n\alpha_1,\quad \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha],\ldots \cos n\alpha.$

Dacă operația se face cu șirul (11), ecuația obținută are rădăcinele:

$$(13)\qquad x=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_7-\frac{k\pi}{n}\right)},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1);$$

iar dacă operația se face cu șirul (12), ecuația obținută are rădăcinele:

$$(14)\qquad x=\frac{\sin\left[\alpha-\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]}{\sin\left[\alpha_1-\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1).$$

4. Dacă am considera ecuațiunea:

$$(15)\qquad (x+1)^{(n)}=0,$$

unde (n) ne-ar aminti și aci, a înmulți termenii desvoltării (15), respectiv cu numerile șirului (11) sau (12), am obține niște ecuații, ale căror rădăcini corespunzătoare ar fi acelea date de (13) sau (14), dar cu semne schimbate. Aceasta rezultă și din înlocuirea în (10), a lui x prin, $-x$.

5, Ușor putem observa că ecuațiunea:

$$(16)\qquad (x-1)^{(2p)}=0,$$

cu șirul corespunzător:

(17) $\sin 2p\alpha_1,\quad \sin[(2p-1)\alpha_1+\alpha],\ldots \sin 2p\alpha,$

și cu rădăcinele:

$$(18)\qquad x=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{k\pi}{2p}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\pi}{2p}\right)},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots 2p-1),$$

se poate descompune în două ecuațiuni de aceași formă:

$$(x-1)^{(p)}=0,\quad \text{și}\quad (x-1)^{(p)}=0,$$

primei corespunzându-i șirul:

$\sin p\alpha_1\quad \sin[(p-1)\alpha_1+\alpha],\ldots \sin p\alpha$

și având rădăcinele:

$$(19)\qquad x=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{k\pi}{p}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\pi}{p}\right)},\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots p-1),$$

și a 2-a corespunzându-i șirul de cosini:

$\cos p\alpha_1,\quad \cos[(p-1)\alpha_1+\alpha],\ldots \cos p\alpha,$

rădăcinele ei fiind:

$$(20)\qquad x=\frac{\sin\left[\alpha-\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right]}{\sin\left[\alpha_1-\frac{(2k-1)\pi}{2p}\right]}.$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots p-1).$$

Exemplu. Ecuația:

$$(21)\qquad (x-1)^{(4)}=0,$$

cu șirul corespunzător:

(22) $\sin 4\alpha_1,\quad \sin(3\alpha_1+\alpha),\quad \sin(2\alpha_1+2\alpha),$
$\sin(\alpha_1+3\alpha),\quad \sin 4\alpha,$

se descompune în ecuațiile:

$$(x-1)^{(2)}=0\quad \text{și}\quad (x-1)^{(2)}=0,$$

prima cu șirul corespunzător:

$\sin 2\alpha_1,\quad \sin(\alpha_1+\alpha),\quad \sin 2\alpha,$

și a 2-a cu șirul corespunzător:

$\cos 2\alpha_1,\quad \cos(\alpha_1+\alpha),\quad \cos 2\alpha.$

Aceste ecuații scrise complect, sunt:

Prima:

$$(23)\qquad \sin 2\alpha_1\,.\,x^2-2\sin(\alpha_1+\alpha)\,.\,x+\sin 2\alpha=0,$$

cu rădăcinele:

$$(24)\qquad x_1=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1},\quad x_2=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1},$$

cum rezultă din (19).

A 2-a ecuație, este:

$$(25)\qquad \cos 2\alpha_1\,.\,x^2-2\cos(\alpha_1+\alpha)\,.\,x+\cos 2\alpha=0;$$

cu rădăcinele:

$$(26)\qquad x_1=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)},\quad x_2=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha_1+\frac{\pi}{4}\right)},$$

cum rezultă din (20).

Observare. Analog am putea descompune ecuaţia:

$$(x-1)^{(2p)}=0,$$

cu şirul corespunzător:

$$\cos p\alpha_1,\quad \cos[(2p-1)\alpha_1+\alpha],\ldots\ \cos 2p\alpha,$$

în alte două ecuaţii, ceeace vom arăta altă dată.

§ 3.

Vom arăta în acest paragraf, cum prin derivări succesive a unor ecuaţiuni din cele studiate, reuşim a construi noi clase de ecuaţiuni cu rădăcini reale, rădăcini care se pot scri imediat.

1. Să pornim dela ecuaţia (10), § 2, cu şirul corespunzător (11), ecuaţie echivalentă cu:

$$(1)\qquad (e^{i\alpha_1}x-e^{i\alpha})^n-(e^{-i\alpha_1}x-e^{-i\alpha})^n=0,$$

şi cu cădăcinele, cum am văzut:

$$(2)\qquad x=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\alpha_1-\frac{k\pi}{n}\right)},\quad (k=0.\ 1,\ 2,\ldots n-1).$$

Să derivăm de p ori $(p=0,\ 1,\ldots n-1)$, ecuaţia (1), avem:

$$(e^{i\alpha_1}x-e^{i\alpha})^{n-p}e^{ip\alpha_1}-(e^{-i\alpha_1}x-e^{-i\alpha})^{n-p}e^{-ip\alpha_1}=1$$

sau:

$$(3)\qquad \left[e^{i\left(\alpha_1+\frac{p\alpha_1}{n-p}\right)}x-e^{i\left(\alpha+\frac{p\alpha_1}{n-p}\right)}\right]^{n-p}-\left[e^{-i\left(\alpha_1+\frac{p\alpha_1}{n-p}\right)}x-e^{-i\left(\alpha+\frac{p\alpha_1}{n-p}\right)}\right]^{n-p}=0,$$

ecuaţie care se mai poate scri:

$$(4)\qquad \sin n\alpha_1\cdot x^{n-p}-C^1_{n-p}\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha].$$
$$x^{n-p-1}+\ldots+(-1)^{n-p}\sin[p\alpha_1+(n-p)\alpha]=0.$$

Observăm că ecuaţia (3), este de aceiaşi formă cu (1), numai că argumentele α şi α_1, sunt înlocuite respectiv, prin:

$$\alpha+\frac{p\alpha_1}{n-p},\quad \alpha_1+\frac{p\alpha_1}{n-p},$$

şi exponentul n prin $n-p$. Rezultă deci, că şi rădăcinele ecuaţiei (3) se pot obţine din (2), prin aceleaşi substituţii, ele sunt deci;

$$(5)\qquad x=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{p\alpha_1-k\pi}{n-p}\right)}{\sin\left(\alpha_1+\frac{p\alpha_1-k\pi}{n-p}\right)},$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-p-1).$$

Observare. Ecuaţia (3) sau (4), se poate scri într'o formă prescurtată, astfel:

$$(6)\qquad (x-1)^{(n-p)}=0,$$

unde $(n-p)$, ne indică să înmulţim termenii desvoltării (6), respectiv cu numerile din şirul:

$$(7)\quad \sin n\alpha_1,\ \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha],\ldots\sin[p\alpha_1+(n-p)\alpha]$$

acelaşi şir (11) ce corespunde ecuaţiei (10), § 2.

Ecuaţia (6) este de o mare generalitate, căci ea cuprinde atât ecuaţia (1) (pentru $p=0$), cât şi toate ecuaţiile obţinute din ea prin derivări succesive $(p=1,\ 2,\ldots n-1)$, rădăcinele tuturor acestor ecuaţiuni, fiind cuprinse într'o aceiaşi expresie unică, dată de (5).

2. Dacă în ecuaţia (4) înlocuim pe α şi α_1 respectiv, prin:

$$\alpha+\frac{\pi}{2n},\quad \alpha_1+\frac{\pi}{2n},$$

obţinem ecuaţia:

$$(8)\qquad \cos n\alpha_1\cdot x^{n-p}-C^1_{n-p}\cos[(n-1)\alpha_1+\alpha]\cdot$$
$$x^{n-p-1}+\ldots+(-1)^{n-p}\cos[p\alpha_1+(n-p)\alpha]=0,$$

ecuaţie care se poate scri simbolic, astfel:

$$(9)\qquad (x-1)^{(n-p)}=0,$$

cu şirul corespunzător:

$$(10)\qquad \cos n\alpha_1,\quad \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha],\ldots$$
$$\cos[p\alpha_1+(n-p)\alpha].$$

Rădăcinele acestei ecuaţii (9), evident că sunt:

$$(11)\qquad x=\frac{\sin\left[\alpha+\frac{2p\alpha_1-(2k-1)\pi}{2(n-p)}\right]}{\sin\left[\alpha_1+\frac{2p\alpha_1-(2k-1)\pi}{2(n-p)}\right]},$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-p-1).$$

deduse din (5), prin aceiaşi substituţie a lui α şi α_1, pe care am făcut-o în ecuaţia (4).

Observare. Ecuaţia (9) am fi obţinut-o şi direct, derivând de p ori, ecuaţia:

$$(e^{i\alpha_1}x-e^{i\alpha})^n+(e^{-i\alpha_1}x-e^{-i\alpha})^n=0.$$

3. Din cele de mai sus, rezultă:

Dacă luăm ecuaţia:

$$(12)\qquad (x-1)^{(n-p)}=0,\quad (p=0,\ 1,\ 2,\ldots n-1),$$

şirul corespunzător indicat de $(n-p)$, *poate fi:*

$$(13)\qquad \sin n\alpha_1,\ \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha],\ldots \sin[p\alpha_1+(n-p)\alpha],$$

sau:

$$(14)\qquad \cos n\alpha_1,\ \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha],\ldots \cos[p\alpha_1+(n-p)\alpha].$$

Dacă şirul corespunzător este (13), rădăcinele ecuaţiei (12) sunt date de (5), iar dacă şirul corespunzător este (14), rădăcinele ecuaţiei (12) sunt date de (11).

4. Dacă considerăm două ecuaţii de forma (12), cu şirul corespunzător (13) sau (14), pentru două valori consecutive a lui p, aceste ecuaţiuni având toate rădăcinele lor reale, rezultă în virtutea teoremei lui *Rolle*, că rădăcinele uneia sunt separate de rădăcinele celeilalte.

Astfel, ecuaţiile:

$$(15)\qquad (x-1)^{(n-p)}=0 \quad \text{şi} \quad (x-1)^{(n-p-1)}=0,$$

ce corespund şirului:

$$(16)\qquad \sin n\alpha_1,\ \sin[(n-1)\alpha_1+\alpha],\ldots$$

are, prima rădăcinele:

$$(17)\qquad x=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{p\alpha_1-k\pi}{n-p}\right)}{\sin\frac{n\alpha_1-k\pi}{n-p}},\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-p-1).$$

separate de rădăcinele celei de a 2-a, care sunt:

$$(18)\qquad x=\frac{\sin\left[\alpha+\frac{(p+1)\alpha_1-k\pi}{n-p-1}\right]}{\sin\frac{n\alpha_1-k\pi}{n-p-1}},\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots n-p-2).$$

In parlicular pentru, $p=n-2$, ecuaţiile (15), devin:

$$(19)\quad (x-1)^{(2)}=0, \qquad (20)\quad (x-1)^{(1)}=0,$$

cu şirul corespunzător (16), ecuaţii care desvoltate pot fi scrise:

$$(21)\qquad \sin n\alpha_1\,.\,x^2-2\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]\,.\,x+\sin[(n-2)\alpha_1+2\alpha]=0$$

$$22)\qquad \sin n\alpha_1\,.\,x-\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]=0.$$

Rezultă din cele spuse, că rădăcina ecuaţiei (22):

$$\frac{\sin[(n-1)\alpha_1+\alpha]}{\sin n\alpha_1},$$

este cuprinsă între:

$$\frac{\sin\left[\alpha-\frac{(n-2)\alpha_1}{2}\right]}{\sin\frac{n\alpha_1}{2}} \text{ şi } \frac{\cos\left[\alpha+\frac{(n-2)\alpha_1}{2}\right]}{\cos\frac{n\alpha_1}{2}},$$

rădăcini ale ecuaţiei (21).

Aceleaşi concluzii pentru rădăcinele ecuaţiilor (15), dacă şirul corespunzător ar fi:

$$\cos n\alpha_1,\ \cos[(n-1)\alpha_1+\alpha],$$

§ 4.

Ar fi încă multe chestiuni de cercetat în domeniul ecuaţiilor de care ne-am ocupat, ecuaţiuni care au toate rădăcinele lor reale.

Am putea de exemplu, plecând dela una din ecuaţiile studiate:

$$f(x)=0,$$

ale cărei rădăcini reale se pot scri imediat, să vedem cum am putea scri dintr'odată şi rădăcinele ecuaţiei:

$$f(x)+af'(x)=0, \qquad (a,\ \text{real}),$$

care evident sunt toate reale.

Asemenea, privind ecuaţiile studiate. care au toate rădăcinele lor reale şi de formă trigonometrică, am putea construi o clasă importantă de identităţi trigonometrice, folosind relaţiile cunoscute dintre rădăcinele şi coeficienţii unei ecuaţii, ceiace voi face cu altă ocazie. Voesc însă să termin acest artlcol, prin câteva aplicaţii interesante.

Vom vedea cum putem rezolvi pe această cale, ecuaţia generală de gradul al 3-lea:

$$x^3+px+q=0,$$

în cazul ireductibil, precum şi ecuaţia de gradul al 2-lea:

$$x^2+px+q=0, \quad \text{când,} \quad p^2-4q>0.$$

1. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(1)\qquad (x-1)^{(6)}=0,$$

cu şirul corespunzător:

$$(2)\quad \sin 6\alpha_1\ \sin(5\alpha_1+\alpha),\ldots \sin(\alpha_1+5\alpha),\ \sin 6\alpha,$$

în cazul particular:

$$(3) \qquad \alpha_1 = 2\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Şirul (2) în cazul nostru, devine:

$$0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,$$

Astfel ecuaţia (1) desvoltată, este:

$$(4) \qquad 3\sqrt{2}\,x^5 - 15x^4 + 10\sqrt{2}\,x^3 - 3\sqrt{2}\,x + 1 = 0,$$

Rădăcinele acestei ecuaţii, sunt:

$$(5) \qquad x = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{6}\right)}, \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5),$$

cum rezultă din (13), § 2, unde natural am luat $n = 6$, şi am ţinut seamă de (3).

Rădăcinele cuprinse în (5), calculate, devin:

$$(6) \qquad \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}},\ \sqrt{2+\sqrt{3}},\ -\sqrt{2-\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

rădăcini care se pot verifica şi direct.

Observare. Altă metodă mai simplă de a rezolva ecuaţia (1), este aceea a o descompune. In adevăr, ea se poate descompune (punctul 5, § 2), în ecuaţia:

$$(7) \qquad (x-1)^{(3)} = 0,$$

cu şirul corespunzător:

$$(8) \qquad \sin 3\alpha_1,\ \sin(2\alpha_1 + \alpha),\ \sin(\alpha_1 + 2\alpha),\ \sin 3\alpha,$$

şi într'o altă ecuaţie:

$$(9) \qquad (x-1)^{(3)} = 0,$$

cu şirul corespunzător:

$$(10) \qquad \cos 3\alpha,\ \cos(2\alpha_1 + \alpha),\ \cos(\alpha_1 + 2\alpha),\ \cos 3\alpha.$$

Cum şirurile (8) şi (10), în cazul nostru:

$$\left(\alpha_1 = 2\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$$

devin:

$$-1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

rezultă că ecuaţiile (7) şi (9) în care se descompune ecuaţia (1), sunt:

$$2x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{2} = 0$$

$$3\sqrt{2}\,x^2 - 6x + \sqrt{2} = 0.$$

Rădăcinele primei, cum reiese din (19), § 2, sunt:

$$\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2},$$

iar ale ecuaţiei a 2-a, cum reiese din (20), § 2, sunt:

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}},\qquad \frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$$

De altfel se pot găsi şi direct aceste rădăcini.

Cele cinci rădăcini astfel aflate, sunt identice cu cele din şirul (6), cum uşor putem constata.

2. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(11) \qquad (x-1)^{(3)} = 0,$$

şirul corespunzător ţiind:

$$\sin 3\alpha_1,\quad \sin(2\alpha_1 + \alpha),\quad \sin(\alpha_1 + 2\alpha),\quad \sin 3\alpha$$

Ecuaţia, scrisă desvoltat este:

$$(12) \qquad \sin 3\alpha_1 \cdot x^3 - 3\sin(2\alpha_1 + \alpha)\cdot x^2 + 3\sin(\alpha_1 + 2\alpha)\cdot x - \sin 3\alpha = 0.$$

Rădăcinele sale, ţinând seamă de relaţia (13), § 2 ($n = 3$), sunt:

$$(13) \qquad x_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1},$$

$$x_2 = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{3}\right)},\qquad x_3 = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{2\pi}{3}\right)}.$$

3. Dacă derivăm (12), obţinem ecuaţia:

$$(14) \qquad \sin 3\alpha_1 \cdot x^2 - 2\sin(2\alpha_2 + \alpha)\cdot x + \sin(\alpha_1 + 2\alpha) = 0$$

cu rădăcinele, cum reiese din (5), §, 3 ($n = 3$, $p = 1$):

$$(15) \qquad x_1 = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2}\right)}{\sin\frac{3\alpha_1}{2}},\qquad x_2 = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2}\right)}{\cos\frac{3\alpha_1}{2}}.$$

Observare. In virtutea teoremei lui *Rolle*, rădăcinele (13) sunt separate de rădăcinele (15).

4. Dacă în ecuația (12), luăm:

$$\alpha = -2\alpha_1, \tag{16}$$

și înlocuim în același timp pe x prin ax, obținem ecuația:

$$a^3 \sin 3\alpha_1 \cdot x^3 - 3a \sin 3\alpha_1 \cdot x + \sin 6\alpha_1 = 0,$$

sau:

$$x^3 - \frac{3}{a^2}x + \frac{2\cos 3\alpha_1}{a^3} = 0. \tag{17}$$

Rădăcinele acestei ecuații, se deduc evident din (13) unde facem aceiași substituție (16) și găsim că ele sunt:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{a}\cos\alpha_1, \\ x_2 = -\dfrac{1}{a}\dfrac{\sin\left(2\alpha_1 + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 - \frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{2}{a}\sin(30^0 + \alpha_1), \\ x_3 = -\dfrac{1}{a}\dfrac{\sin\left(2\alpha_1 + \frac{2\pi}{3}\right)}{\sin\left(\alpha_1 + \frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{2}{a}\cos(\alpha_1 + 60^0). \end{cases} \tag{18}$$

5. *Vom rezolvi acum ecuația de gradul al 3-lea:*

$$x^3 + px + q = 0, \tag{19}$$

în cazul când are rădăcini reale $\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0\right)$, *cazul ireductibil, cunoscut.*

Pentru aceasta, vom identifica ecuația (19), cu ecuația (17), și găsim condițiile;

$$-\frac{3}{a^2} = p, \quad \frac{2\cos 3\alpha_1}{a^3} = q,$$

Putem lua deci:

$$a = -\sqrt{-\frac{3}{p}}, \tag{20}$$

de unde rezultă:

$$\cos 3\alpha_1 = -\frac{q}{2\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}. \tag{21}$$

Rădăcinele ecuației (19), se deduc acum ușor din (18), unde a e dat de (20), ele sunt:

$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\alpha_1, \\ x_2 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(60^0 - \alpha_1), \\ x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(120^0 - \alpha_1), \end{cases} \tag{22}$$

α_1 fiind determinat de relația (21)

6. *Să se rezolve ecuația:*

$$(x-1)^{(2)} = 0,$$

cu șirul corespunzător:

$$\sin 2\alpha_1, \quad \sin(\alpha_1 + \alpha), \quad \sin 2\alpha.$$

Ecuația scrisă desvoltat este:

$$\sin 2\alpha_1 \cdot x^2 - 2\sin(\alpha_1 + \alpha) \cdot x + \sin 2\alpha = 0. \tag{23}$$

Rădăcinele sale ținând seamă de relația (13), § 2, $(n=2)$, sunt:

$$x_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}, \qquad x_2 = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}, \tag{24}$$

7. Dacă în ecuația (23), luăm:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

și înlocuim x prin ax, obținem ecuația:

$$x^2 - \frac{2}{a\sin 2\alpha} \cdot x + \frac{1}{a^2} = 0, \tag{25}$$

cu rădăcinele, deduse din (24), anume:

$$x_1 = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\alpha, \quad x_2 = \frac{1}{a}\operatorname{cot}\alpha. \tag{26}$$

9, *Vom rezolvi acum trigonometric, ecuația:*

$$x^2 + px + q = 0, \tag{27}$$

cu rădăcini reale.

Identificăm ecuația (27) cu (25) și găsim:

$$-\frac{2}{a\sin 2\alpha} = p, \quad \frac{1}{a^2} = q.$$

Putem deci lua:

$$a = \frac{1}{\sqrt{q}},$$

și atunci rezultă:

$$\sin 2\alpha = \frac{-2\sqrt{q}}{p}. \tag{28}$$

Rădăcinele ecuației (27) se deduc atunci din (26) și sunt:

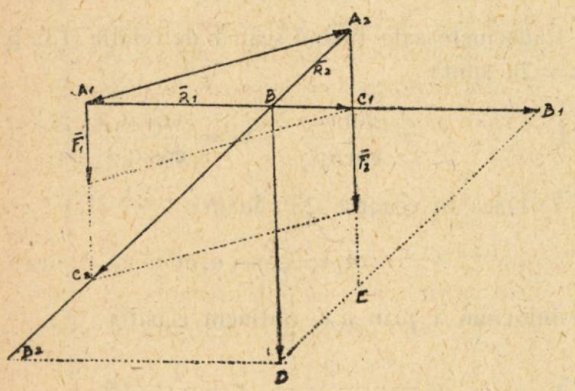
$$x_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad x_2 = \sqrt{q}\cos\alpha,$$

unde α e determinat de relația (28).

Această metodă este mai simplă decât cea obicinuită, care cere anumite artificii.

NOTE MATEMATICE

24. *Asupra compunerei a două forțe paralele.* Se știe cum se arată că rezultanta a două forțe paralele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ e paralelă cu ele și egală cu suma lor.



Vom folosi simplificarea d-lui *Vâlcovici*: Adăogăm în A_1 forța $\overline{A_1 A_2}$ și în A_2 forța $\overline{A_2 A_1}$ ceiace este permis.

Rezultantelor $\bar{R}_1$ a forțelor $\bar{F}_1$, $\overline{A_1 A_2}$ și $\bar{R}_2$ a forțelor $\bar{F}_2$, $\overline{A_2 A_1}$ le mutăm punctele de aplicație în punctul lor de intersecție B.

Luăm astfel $C_1 B_1 = A_1 B$ și $C_2 B_2 = A_2 B$.

Obicinuit se duce apoi prin B paralele la $A_1 A_2$ și la direcțiile forțelor $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ descompunând după aceste paralele forțele $\bar{R}_1$ și $\bar{R}_2$ cu punctul de aplicație în B. Componentele lor, după direcția paralelă la $A_1 A_2$, se suprimă fiind egale și de sens contrar, iar celelalte două după direcția paralelă cu forțele inițiale se compun, suma lor fiind $\bar{F}_1 + \bar{F}_2$, cum ușor se poate arăta.

Aci voesc să aduc o simplificare. Nu-i nevoe a mai descompune pe $\bar{R}_1$ și $\bar{R}_2$ cu punctul de aplicație în B, ci le compunem după regula paralelogramului, obținând rezultanta B D.

Voesc să dovedesc că B D este paralelă cu forțele $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ și mare cât suma lor.

Pentru aceasta prelungesc pe $A_2 C_1$ până în E unde a întâlnit pe $B_1 D$ și observ că triunghiurile $B_1 C_1 E$ și $B A_1 C_2$ sunt egale, având:

$$C_1 B_1 = A_1 B, \quad \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B, \quad \sphericalangle C_1 = \sphericalangle A_1,$$

fiind corespondente formate de laturi paralele:

Rezultă:

$$B_1 E = B C_2, \quad C_1 E = A_1 C_2 = F_2.$$

Fiindcă: $B_1 D = B B_2$ și $B_1 E = B C_2$, rezultă:

$$E D = C_2 B_2 = A_2 B.$$

Patrulaterul $A_2 B D E$ este un paralelogram, având $A_2 B \# E D$; de unde rezultă:

$$B D \# A_2 E = A_2 C_1 + C_1 E = F_1 + F_2.$$

Așa dar B D, rezultanta lui $\bar{R}_1$ și $\bar{R}_2$ deci a sistemului echivalent inițial, e paralelă și egală cu suma lui $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$. In mod analog se tratează cazul când $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ sunt paralele și de sens contrar.

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, an. XXXV, No. 3, Noembrie 1929. Snr les cordes d'nne courbe vues d'un point fixe sous un angle constant, par *R. Goormaghtigh*. Proprietăți ale patrulaterului inscriptibil, de *Ion I. Georgescu-Racoviță*. Concursul „*Gazetei Matematice*". Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „*Vasile Conta*", pe anul 1929, de *Al. Bunescu, C. Malcoci* și *O. Țino*.

2. *Bullelin Mathématique*, de la Société Roumaine des Sciences, 32 (1). Lista membrilor. Sur une classe de fonctions permutables, par *N. Theodoresco*. Sur l'applicabilité projective des hypersurfaces développable, par *Alexandre Pantazi*. Procese-verbale ale ședințelor din 4 și 18 Martie 1929, din 6, 15 și 29 Aprilie 1929, din 27 Mai și 10 Iunie 1929.

3. *Buletinul societății de științe din Cluj*, tome IV, fascicola 4. Contribution à la formation des ammines des sulfocyanures métalliques en solution aqueuse, par *Ripan et L. Dima*. Familles de variétés Riemaniennes, par *G. Vrânceanu*. Sur la représentation directe des opérations du calcul tensoriel, par *V. Lalan*. Sur la théorie quantique des Gaz, par *N. Bărbulescu*. Sur la transformation d'une

équation differentielles en équation aux différences, par *D. Pompeiu*. Analyse de l'eau provenant de „Băile Episcopiei", par *J. Dick*. Réponse à une critique parue dans ce Bulletin à la page 164, par *A. Maior*. Contribution à la formation des ammines doubles en solution aqueuse, par *R. Ripan*. Une nouvelle méthode microchimique pour le dosage du mercure, par *C. Spacu* et *G. Suciu*. Sur benzoilbiureto e la sua transformazione in fenil-diossitriazina, par *A. Ostrogovitch*.

Partea 2-a cuprinde chestiuni de ştiinţi naturale, articole de: *E. G. Racovitză, P. A. Chappuis, R. Jeannel*.

4. *Bulletin Scientifique* de l'école polytechnique de *Timişoara*, tome 2, fasc. 3 — 4. 1929. Remarques sur l'équation différentielle linéaire du premier ordre, par *D. Pompeiu*. Remarques sur les zéros de l'équation cubique, par *P. Sergescu*. Sur les „puissances périodiques" et les polynomes de *Bernoulli*, par *Ernest Abason*. Sur une classe de fonctions monogènes, par *M. Ghermanesco*. Sur les fonctions monogènes, par *M. Ghermanesco*. Sur les mouvements fluides engendrés par la rotation de certains solides par *Victor Vâlcovici*. Résistance de la suprastructure, par *A. Toussaint*. Procès-verbaux des séances de la Société scientifique de l'école polytechnique de Timişoara.

5. *Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées*, de l'école polytechnique de *Bucarest*. Remarque sur le théorème de Rouché, par *P. Sergesco*. Sur le théorème des accroissements finis, par *Ernest Abason*. Sur les groupes paramétriques des groupes fonctionnels, par *Gr. C. Moisil*. Le cas d'exception de certaines propriétés quadratiques, par *Dan Barbelian*. Sur certaines propriétés quadratiques, par *G. Tzitzeica*. Sur la structure des formules en physique et le sens intime des lois de similitude par *D. Ghermani*. Sur le potentiel des métaux dans les liquides purs, par *Er. Toporescu*. Brachistrochrone d'une mobile entrainé par un milieu fluide en mouvement, par *Alex. Froda*. Sur l'emploi des methodes fonctionnelles dans la mécanique, par *O. Onicesco*. La répartition des efforts tranchants dans une file de rivets, par *Ion Ionesco*. Sur la condition des vitessses dans un fluide imcompressible, par *D. Pompeiu*. Dynamique du galvanométre à cadre mobile avec condensateur et sefinduction aux bornes par *Vasilesco Karpen*. Caractéristiques des lignes de transmission télégraphiques, par *I. Constantinesco*. Sur la variation de l'impédance équivalente d'une ligne de transmission en haute fréquence, par *Tudor A. Tanasesco*. † *Traian Lalesco*, par *Ernest Abason*.

6. *V. Vâlcovici*. Sur le genre des vecteurs électro-magnétiques. (Extras din Mathematica, vol. II, pag. 106 — 108).

7. *V. Văccovici*. Asupra mişcărilor rotatorii în fluide (Extrait du Bulletin de la Société des Sciences, t. 30, 2, 1927).

8. *V. Vâlcovici*. Généralisation du théorème de *Koenig*. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. t. 188, p. 769, séance du 11 Mars 1929).

9. *Ernest Abason*. Sur les séries de puissances périodiques. (Extras din Mathematica. vol. I, pag. 113 — 120).

10. *P. Sergescu*. Sur les modules des racines des équations algébriques. (Extras din Mathematica, vol. II, pag. 140 — 153).

11. *P. Sergescu*. Sur les modules des zéros de l'équation du troisième degré. (Annales de la Société Polonaise de Mathématique 1929).

12. *Radu Badescu*. Sur l'équation intégrale *d'Abel* généralisée. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 188, séance du 14 janvier 1929 et de 18 Mars 1929).

13. *Radu Badesco*. Sur une équation intégrale. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 189, séance du 8 juillet et 29 juillet 1929).

PROBLEME REZOLVATE

797. — *Fie* M *mijlocul laturei* AB *a triunghiului* ABC *şi* E *un punct pe această latură. Paralela dusă din* M *la* EC *tae pe* AC *în* D. *Să se demonstreze că suprafeţele* BEDC *şi* EAD *sunt echivalente când* E *este cuprins între* M *şi* B *şi să se examineze celelalte cazuri.*

COL. GH. BUICLIU

Problema se rezolvă uşor examinând figura în diferitele cazuri care se pot prezenta.

1. *Fie* E_1 *între* M *şi* B. Pe figură se vede că avem:

$$BE_1D_1C = BCE_1 + E_1D_1C,$$

dar E_1D_1C este echivalent cu E_1MC ca având baza CE_1 comună şi vârfurile pe o paralelă la bază. Deci:

(1) $$BE_1D_1C = BCE_1 + E_1CM = MCB = ACM$$

Apoi:

$$E_1D_1A = AD_1M_1 + E_1D_1M = AD_1M_1 + M_1D_1C$$

(2) $$\therefore E_1D_1A = ACM - MD_1C + MD_1C = ACM.$$

Comparând (1) şi (2) rezultă echivalenţa cerută a se demonstra.

2. E_2 *se află între* A *şi* M. In acest caz avem:

(3) $$BE_2CD_2 = BMD_2 + E_2D_2M + E_2D_2C$$

$$E_2AD_2 = AMD_2 - E_2D_2M$$

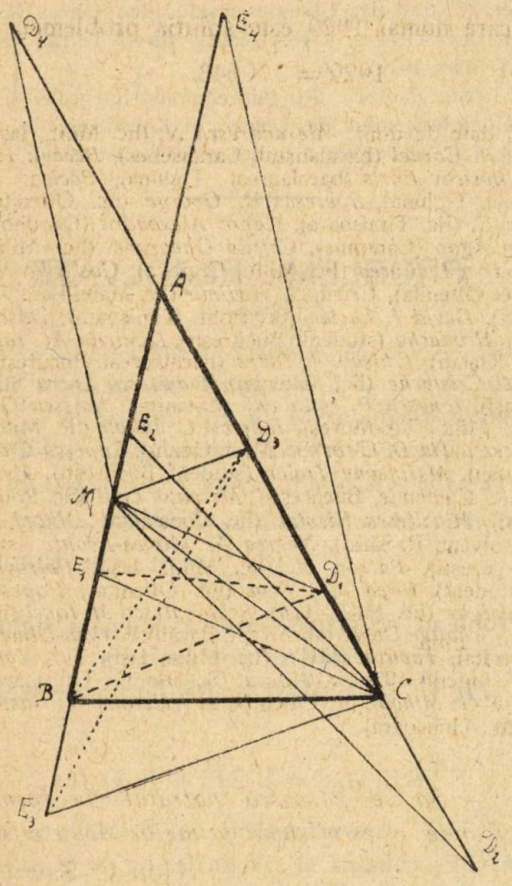
$$AMD_2 = BMD_2.$$

Cum:

(4) $$E_1 A_1 C = B M D_2 - E_2 D_2 M,$$

(3) şi (4) arată că:

$$B E_2 C D_2 > E_2 A D_2.$$



3. E_3 *se află pe prelungirea lui* A B. Avem:

$$E_3 B D_2 C = B D_3 E_3 + E_3 D_3 C$$

$$E_3 A D_3 = B D_3 E_3 + B D_3 A.$$

Dar E_3 fiind mai departe de A decât B, distanţa dela E_3 la A C va fi mai mare decât distanţa dela B la AC. Pe de altă parte M fiind mai aproape de A decât de E_3 vom avea:

$$D_3 C > A D_3,$$

deci:

$$E_3 D_3 C > B D_3 A$$

$$\therefore \quad E_2 B D_3 C > E_3 A D_3.$$

4. E_4 *este pe prelungirea lui* B A. In acest caz avem imediat:

$$E_4 A D_4 < B D_4 E_4 C,$$

căci ultimul poligon înconjură pe primul

V. *Cazurile limită.* Când E este în M, cele două suprafeţe sunt echivalente. Când M este în B sau A, se păstrează relaţiunea de mărime dela cazurile de sub 1.

A examinat toate cazurile dând o bună soluţie d-*Schuller D.* (absolvent de liceu, Bacău).

Soluţii parţiale s'au primit dela d-nii: *Carp Ig.* (Chişinău), *Firoiu I.* (lic. Arad), *Ionescu P. H.* (Oltenita), *Ionescu-Ţiu D. C.*, *Raiceff Gh. R.* (absolvent de liceu, Silistra), *Zagaican I.* (conductor de lucrări publice).

822 — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} a x^3 + b y^3 = x \\ a y^3 + b x^3 = y \end{cases}$$

C-TIN V. COSTACHESCU

Adunând şi scăzând ecuaţiile sistemului, avem:

$$\begin{cases} (a+b)(x^3+y^3) = x+y \\ (a-b)(x^3-y^3) = x-y, \end{cases}$$

care se mai pot scri:

$$\begin{cases} (x+y)[(a+b)(x^2-xy+y^2)-1] = 0 \\ (x-y)[(a-b)(x^2+xy+y^2)-1] = 0. \end{cases}$$

Acest sistem este echivalent cu următoarele patru:

(1) $$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$ (2) $$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2=\dfrac{1}{a-b} \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} x^2-xy+y^2=\dfrac{1}{a+b} \\ x-y=0 \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} x^2-xy+y^2=\dfrac{1}{a+b} \\ x^2+xy+y^2=\dfrac{1}{a-b} \end{cases}$$

Din sistemul (1) deducem:

$$x = y = 0$$

Din sistemul (2), deducem:

$$x = -y = \frac{1}{\pm\sqrt{a-b}}.$$

Din sistemul (3), deducem:

$$x = y = \frac{1}{\pm\sqrt{a+b}}.$$

Sistemul (4) prin adunare şi scădere devine:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right) = \frac{a}{a^2-b^2} \\ 2xy = \frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b} = \frac{2b}{a^2-b^2}. \end{cases}$$

Adunând şi scăzând aceste ecuaţii, deducem:

$$\begin{cases} x+y = \pm\sqrt{\frac{a+2b}{a^2-b^2}} \\ x-y = \pm\sqrt{\frac{a-2b}{a^2-b^2}} \end{cases}$$

Adunând şi scăzând din nou, obţinem:

$$\begin{cases} x = \frac{\pm\sqrt{a+2b}\pm\sqrt{a-2b}}{2\sqrt{a^2-b^2}} \\ y = \frac{\pm\sqrt{a+2b}\mp\sqrt{a-2b}}{2\sqrt{a^2-b^2}}. \end{cases}$$

Soluţii date de d-nii: *Dimitriu At. Ioan* (absolvent Galaţi), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Milea G. Ene* (absolvent, R-Sărat), *Murăroiu I.* (bacalaureat. Braşov).

Observare. D-l *Grossu I. Mircea* a considerat şi sistemul mai general:

$$\begin{cases} a x^{3n} + b y^{3n} = x^n \\ a y^{3n} + b x^{3n} = y^n. \end{cases}$$

826. — *Să se găsească un număr de patru cifre, care se descompune în doi factori primi, unul de o cifră şi altul de trei cifre terminat cu 43. Suma cifrelor numărului cerut este 21.*

V. ALACI.

Fie $abcd$ numărul cerut. Conform enunţului avem:

$$a+b+c+d = 21,$$

rezultă că numărul cerut e divizibil cu 3 şi atunci factorul prim de o cifră este chiar 3.

Rămâne să găsim celalt factor prim de trei cifre terminat cu 43, care n'ar putea fi de cât:

443, 643, 743.

Acestea înmulţite cu 3 ne dau numerile:

1329, 1929, 2229,

dintre care numai 1929 este soluţia problemei,

$$1929 = 3 \times 643.$$

Soluţii date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit. Iaşi), *Almăjan P. Cornel* (bacalaureat, Caransebeş), *Băcanu Ion* (Sibiu), *Bâcicov Boris* (bacalaureat, Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Boerescu P. George* (lic. Oltenita), *Bugeanu C.* (lic. Timişoara), *Capră Alexandru* (Dorohoi), *Cincilian Agop* (Câmpina), *Chirilă Gheorghe* (lic. Milit., Iaşi), *Codreş I. Florea* (lic. Milit., Craiova), *Costache Niculae* (lic. Oltenita), *Crivăţ I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *David I. Lucian* (Şc. Polit., Timişoara), *Dăscălescu St. Hristache* (student, Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (absolv., Galaţi), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, Bucureşti), *Grecu M. Cristache* (lic. Oltenita), *Ioanitescu D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu P. Haralamb* (Oltenita), *Ionescu Gh. Ioan* (lic. Milit, Tg.-Mureş), *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. Geniu), *Lupescu C-tin* (lic. Roman). *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Mecu I Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţă Emil* (Şc. Polit., Bucureşti), *Mihăilescu Nicolae* (lic. Constanţa), *Millea R. Ene* (absolvent, R.-Sărat), *Negrea A. Mircea-Leonte* (student, Bucureşti), *Patron M.* (lic. Milit., Iaşi), *Petrovici D-tru* (student), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Popescu Gh. Gheorghe* (lic. Milit., Iaşi), *Şchiopulescu M. Ionel* (lic. Caracal), *Schuller David* (absolvent, Bacău), *Şerban-Ulmeni* (lic. Oltenita), *Teodorescu St.* (lic. Milit., Iaşi), *Tutoveanu Valeriu* (student), *Ţiucra Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Ungheanu G. Mihail* (lic. Oltenita) şi *Vâlceanu N. Justin* (Şc. Polit., Timişoara).

834. — *Să se găsească patratul de forma $abcba$ unde c este suma primelor două cifre.*

ION C SAVIN

Fiindcă:

$$a+b = c,$$

rezultă că suma cifrelor numărului cerut este $3c$, adică divizibil cu 3, fiind şi patrat perfect trebue să se dividă cu 9, deci nu poate fi decât 3, 6 sau 9.

Cum ultimele două cifre ale unui patrat perfect sunt:

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 96,

vom lua pentru ba numai pe acelea în care $b+a$, este 3, 6 sau 9, adică:

09, 21, 24, 36, 81.

Rezultă că patratul cerut se găseşte printre numerile:

90909, 12321, 42624, 63936, 18981.

Dintre acestea numai 12321, este patrat perfect:

$$12321 = 111^2,$$

deci este singura soluţie.

Soluţie dată de d-l *Crivăţ I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab Bucureşti).

Alte soluţii date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit., Iaşi), *Antonescu Aurel* (absolvent), *Băcanu Ioan* (Sublocot., Sibiu), *Bidoianu I. Adrian* (lic. Oltenita), *Boerescu P. Gheorghe* (lic. Oltenita), *Brotmann I.* (bacalaureat, Bucureşti), *Cincilian Agop* (Câmpina), *Codreş Florea* (lic. Milit., Craiova), *Costache N.* (lic. Oltenita), *Cristache M. Grecu* (lic. Oltenita), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (Şc. Polit., Bucureşti), *Dăscălescu St. Cristache* (Şc. Polit., Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, Bucureşti), *Ioaniţescu D-tru* (Şc. Milit., Iaşi), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Ionescu Gh. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Mereuţă Emil* (lic. P.-Neamţ), *Mihăilescu N. Nicolae* (lic. Constanţa), *Millea Gh. Ene* (R.-Sărat), *Mocănescu Gr. Ion* (lic. Târgovişte), *Murăroiu I.* (bacalaureat, Braşov), *Moţoc M. D.* (lic. Oltenita), *Negrescu A. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Negrea A. Mircea* (student, Bucureşti), *Patron M.* (lic. Milit, Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Petrică I. Ioan* (Şc. de Conductori, Cluj), *Scarlat D.* (Şc. Navală), *Schiopulescu Ionel* (lic. Caracal), *Şerban Ulmeni* (lic. Oltenita), *Teodorescu Stavarache* (lic. Milit., Iaşi), *Tufoveanu Valeriu* (student) şi *Ungheanu I. Gh. Mihai* (lic. Oltenita).

PROBLEME PROPUSE

531[1]. = Să se studieze variaţiunea funcţiunei:

$$y = \sin x - \operatorname{arctg} x,$$

pentru x cuprins între 0^0 şi 90^0.

COL. GH BUICLIU

866. — Se cere patratul perfect de şase cifre, în care prima cifră este egală cu a treia; a cincea cifră este egală cu a şasea; în fine cifra a doua este rădăcina cubică a numărului format din cifrele întâia, a patra şi a doua.

EMIL MEREUTA

867. — Fie $\varphi_1(N)$ indicatorul lui N, $\varphi_2(N)$ a lui $\varphi_1(N)$, $\varphi_3(N)$ a lui $\varphi_2(N)$,... etc. Să se găsească numerile N astfel ca toţi indicatorii săi succesivi să fie produse de numere prime distincte între ele.

TIB. POPOVICIU

868. — Se dă paralelogramul ABCD. Dintr'un punct E de pe AD se duce o paralelă la AB, care tae pe BC în F. Dreptele AF şi BD se intersectează în G. Se prelungeşte GF cu FH = AG şi GD se prelungeşte cu DI = BG. Se construeşte apoi paralelogramul IGHK. Să se dovedească că diagonala GK este paralelă cu BC şi că avem:

$$GK = AE + BC.$$

V. ALACI

869. — Fie O centrul cercului circumscris unui triunghiu oarecare ABC, iar A', B', C' picioarele înălţimelor sale AH, BH, CH. Cercul cu centrul în A' şi cu raza A'A taie semidreptele paralele duse din A' la semidreptele BO şi CO respectiv în B_a şi C_a.

1°. Să se demonstreze că punctul S_a de întâlnire al dreptelor BB_a şi CC_a aparţine bisectoarei unghiului BAC.

2°. Dacă S_b şi S_c sunt punctele analoage lui S_a, să se arate că avem relaţia:

$$\frac{\overline{OS_a}}{\overline{S_aA'}} + \frac{\overline{OS_b}}{\overline{S_bB'}} + \frac{\overline{OS_c}}{\overline{S_cC'}} = \frac{R}{r},$$

R şi r fiind razele cercurilor circumscris şi înscris triunghiului ABC.

3°. Să se examineze cazul în care semidreptele duse din A' sunt paralele cu semidreptele OB şi OC.

OVIDIU ŢINO

870. — Să se stabilească identitatea:

$$\Sigma (x+1)(z-y)[(y+z)^2 - x^2] = 2(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z).$$

CEZAR COSNITA.

871. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 27^{2y-1} = 243 \times 3^{4x+2} \\ 3 \times 3^{x+y} = \sqrt{81^{2x+1}} \end{cases}$$

ION C. CRISTESCU

1) Se rectifică astfel enunţul dat problemei 531 la pag. 14, vol. VI.

INFORMAȚIUNI

Recomandăm călduros corespondenților noștri, cartea *„Gândirea Matematică“* a d-lui profesor universitar *Petre Sergescu*, premiată de *Academia Română*.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul VIII, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 IANUARIE 1930 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. VICTOR VÂLCOVICI. MISCAREA UNUI CORP SOLID CU CU O AXA FIXA.
2. NOTE MATEMATICE, 25, 26.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 798. 829, 830, 831. 833. 842, 844.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

NUL IX — No. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

RETUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

MIȘCAREA UNUI CORP SOLID CU O AXA FIXA

de VICTOR VALCOVICI

In cursul de mecanică pe care-l fac de câțiva ni la Școala Politechnică din Timișoara, am dat o ormă simplă acestui capitol pe care cred util a aduce la lumina zilei. Ea se deosibește, mai ales n ceeace privește calculul reacțiunilor în cazul endulului fizic, de toate expunerile de prin tratale de mecanică pe care le cunosc.

Ecuația de mișcare. Să considerăm un solid supra căruia lucrează un sistem de forțe date și are are o axă fixă. Ne propunem să-i găsim nișcarea.

Vom raporta solidul la un sistem de axe astfel les încât axa Oz să fie chiar axa fixă a solidului. Evident că este suficient a presupune fixate două puncte O și O′ ale axei (Fig. 1) pentru a conchide că toată axa este imobilă. Imobilitatea

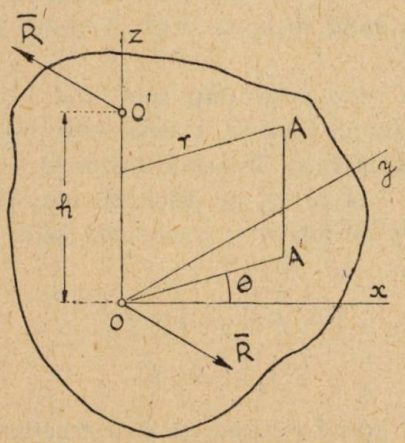


Fig. 1.

acestor puncte o vom traduce prin existența a două reacțiuni $\overline{R}$ și $\overline{R'}$ aplicate respectiv în O și în O′.

Vom observa dela început că solidul având un singur grad de libertate, un singur parametru va fi deajuns pentru a-i determina poziția în spațiu. Vom alege unghiul azimutal θ pe care-l face planul azimutal al unui punct oarecare A din solid, cu un plan fix, xOz de exemplu. Se înțelege că vitesa unghiulară de rotație ω a solidului în jurul axei Oz se obține prin derivarea unghiului θ în raport cu timpul:

$$\dot{\theta} = \omega.$$

Fie $\overline{\mathcal{R}}(X, Y, Z)$ și $\overline{\mathcal{M}}(L, M, N)$ vectorii rezultanți în O ai sistemului de forțe efectiv aplicate solidului.

Teorema momentelor cantităților de mișcare în raport cu axa Oz ne dă:

$$I\dot{\omega} = N, \tag{1}$$

ecuație care conține o singură necunoscută: pe θ cu derivatele sale ω și $\dot{\omega}$.

Ecuația (1) ne rezolvă deci problema mișcării solidului.

Dacă, în particular, N este zero, atunci ω este constant tot timpul, adică solidul este animat de o rotație uniformă. Cazul acesta se realizează, de exemplu, dacă presupunem că asupra solidului nu lucrează de cât greutatea sa iar Oz trece prin centrul său de greutate. Momentul N al greutății față de Oz este evident nul, încât rotația va fi uniformă. O roată mobilă în jurul unei axe ce trece prin centrul ei de greutate va continua indefinit rotația începută în jurul acelei axe. In practică însă evident că nu se poate realiza acest caz ideal din cauza frecării dintre osie și roată care are un moment negativ față de Oz.

Aplicație. Pendulul fizic. Vom trata drept aplicație mișcarea *pendulului fizic:* un solid greu, mobil în jurul unei axe orizontale ce nu trece prin centrul său de greutate.

Vom raporta solidul la un sistem de axe aşa fel ca planul vertical xOy să treacă prin centrul C de greutate al solidului iar axa Ox să fie dirijată vertical în jos. (Fig. 2).

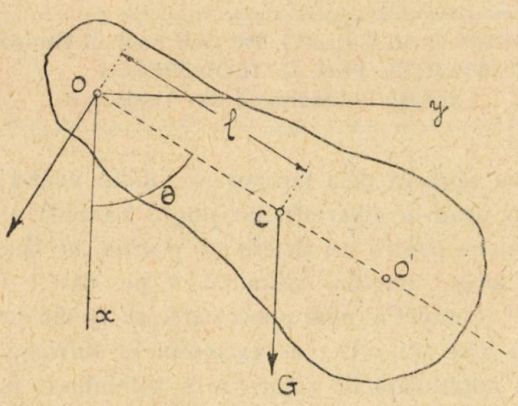


Fig. 2.

Forţele exterioare lucrând asupra solidului se reduc la greutatea sa G aplicată în C, încât dacă însemnăm cu l distanţa OC ecuaţia (1) devine:

$$I\dot{\omega} = -Mgl\sin\theta$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{I}\sin\theta = 0, \tag{2}$$

unde am însemnat cu M masa solidului.

Ecuaţia (2) este identică cu ecuaţia mişcării pendulului simplu de lungime l':

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l'}\sin\theta = 0,$$

cu condiţia ca mărimea constantă care înmulţeşte pe $\sin\theta$ să fie aceeaşi în ambele ecuaţiuni, ceeace se realizează dacă se ia:

$$l' = \frac{I}{Ml}. \tag{3}$$

Relaţia (3) ne dă aşa dar, lungimea pendulului simplu care, la condiţiuni iniţiale identice, are aceeaşi mişcare cu pendulul fizic considerat. Mărimea l' este *lungimea pendulului simplu sincron.*

Inlocuind pe I prin valoarea sa în funcţie de momentul I_0 de inerţie al solidului faţă de axa paralelă la Oz trecând prin C, relaţia (3) devine:

$$I = I_0 + Ml^2,$$

$$l' = \frac{I_0}{Ml} + l$$

de unde deducem că lungimea pendulului sincron întrece distanţa OC cu mărimea $\frac{I_0}{Ml}$ pe care o vom însemna cu l'':

$$l'' = \frac{I_0}{Ml}.$$

Fie O' punctul pe dreapta OC, dincolo de C, aşa fel ca distanţa OO' să fie egală cu l''. Punctul material O' ar avea deci mişcarea pendulară (legat fiind de O printr'un fir inextensibil) ca şi pendulul fizic considerat. Axa paralelă la Oz trecând prin O' se chiamă *axă de oscilaţie* pe când Oz însuşi se cheamă *axă de suspensie.*

Relaţia precedentă poate fi scrisă şi sub forma:

$$l\,l'' = \frac{I_0}{M}.$$

Cum membrul al doilea al acestei identităţi este independent de poziţia axei Oz în solid, deducem că:

a) Lungimea pendulului sincron nu depinde de cât de distanţa dela centrul de greutate al solidului la axa de suspensie.

b) Dacă i se fixează solidului axa de oscilaţie O' dându-i acesteia rolul axei de suspensie, atunci axa Oz devine axă de oscilaţie.

c) Dacă există două axe paralele O şi O' în acelaşi plan cu C şi situate la distanţe neegale de acest punct, care au proprietatea că luate ca axe de suspensie ne dau aceiaşi lungime pentru pendulul sincron corespunzător, atunci acea lungime este chiar distanţa OO' (Teorema lui *Huyghens*).

Primele două proprietăţi sunt evidente. Pentru a demonstra pe cea de a treia vom observa că însemnând cu l_1, l_2 distanţele axelor O şi O' respectiv la C şi cu l_1'', l_2'' distanţele respective dela C la axele de oscilaţie, vom putea scrie conform enunţului:

$$l_1 + l_1'' = l_2 + l_2'',$$

$$l_1\,l_1'' = l_2\,l_2''.$$

Privind aceste relaţiuni ca nişte ecuaţiuni pentru l_1 şi l_1'', nu le vom putea satisface decât cu soluţiunile:

$$l_1 = l_2, \qquad l_1'' = l_2'',$$

sau :

$$l_1 = l_2'', \qquad l_1'' = l_2.$$

Primele soluțiuni sunt excluse prin enunț, iar ele din rândul ultim demonstrează teorema lui *Huyghens.*

Calculul reacțiunilor. Revenind la problema generală a mișcării unui corp în jurul unei axe fixe, e propunem a determina valoarea reacțiunilor. Vom face uz pentru aceasta, de teorema cantităților de mișcare și de teorema momentelor cantităților de mișcare.

Prin teoremă :

$$\frac{d}{dt}\overline{H} = \Sigma \overline{F},$$

proectată pe cele trei axe de coordonate ne dă :

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= X + R_x + R_x', \\ \dot{H}_y &= Y + R_y + R_y, \\ \dot{H}_z &= Z + R_z + R_z', \end{aligned}$$

înstrând notațiile obicinuite. Am însemnat în plus cu R_x, R_y, R_z, respectiv R_x', R_y', R_z' proecțiunile reacțiunilor pe cele trei axe.

Teorema momentelor cantităților de mișcare.

$$\frac{d}{dt}\overline{K} = \Sigma\, \mathfrak{M}_{\cdot}\, \overline{F}$$

proiectată pe cele trei axe de coordonate, ne dă :

$$\begin{aligned} \dot{K}_x &= L - h R_y', \\ \dot{K}_y &= M + h R_x', \\ \dot{K}_z &= N. \end{aligned}$$

Presupunând ecuația (1) adică ultima din (5) rezolvată, vom putea considera pe θ și pe ω drept niște funcțiuni cunoscute de timpul t. Singurele necunoscute în ecuațiile (4) și (5) vor fi cele șease proecțiuni ale reacțiunilor $\overline{R}$ și $\overline{R}'$. Cum însă avem numai cinci ecuațiuni pentru determinarea lor, rezultă că una dintre ele rămâne nedeterminată.

Sistemul este deci *static nedeterminat.*

Să înlocuim componentele vectorilor $\overline{H}$ și $\overline{K}$ din (4) și (5) prin valorile lor în funcție de vitesa de rotație ω.

Insemnând cu r distanța O A′ (Fig. 1), A′ fiind proiecțiunea punctului A (x, y, z) a solidului pe planul xOy, vom putea scrie :

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\cos\theta, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Derivata de ordinul I și al II ale acestor expresii în raport cu timpul ne dau :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r\sin\theta\,.\,\dot{\theta} = -y, \\ \dot{y} &= r\cos\theta\,.\,\dot{\theta} = x, \\ \dot{z} &= 0, \\ \ddot{x} &= -y\,\omega - y\,\dot{\omega} = -x\,\omega^2 - y\,\dot{\omega}, \\ \ddot{y} &= x\,\omega + x\,\dot{\omega} = -y\,\omega^2 + x\,\dot{\omega}, \\ \ddot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Introducând valorile derivatelor $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$ în :

$$\begin{aligned} H_x &= \Sigma m\,\ddot{x}, \\ \dot{H}_y &= \Sigma m\,\ddot{y}, \\ \dot{H}_z &= \Sigma m\,\ddot{z}, \end{aligned}$$

vom obține :

$$\dot{H}_x = -\Sigma m x\,\omega^2 - \Sigma m y\,\dot{\omega} = -\omega^2 \Sigma m x - \dot{\omega}\,\Sigma m y,$$

$$\dot{H}_y = -\Sigma m y\,\omega^2 + \Sigma m x\,\dot{\omega} = -\omega^2 \Sigma m y + \dot{\omega}\,\Sigma m x,$$

$$\dot{H}_z = 0.$$

In mod analog vom putea deduce :

$$\begin{aligned} K_x &= -\Sigma m z y, \\ K_y &= \Sigma m z x, \\ K_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) = I\,\omega, \end{aligned}$$

unde înlocuind pe $\dot{x}$ și $\dot{y}$ cu valorile lor obținute mai sus, vom da peste relațiile :

$$\begin{aligned} K_x &= -\omega\,\Sigma m z x, \\ K_y &= -\omega\,\Sigma m y z, \\ K_z &= I\,\omega. \end{aligned}$$

Derivate în raport cu timpul, aceste relaţii ne dau:

$$\dot{K}_x = -\dot{\omega}\Sigma mzx - \omega\Sigma m\dot{z}x = -\dot{\omega}\Sigma mzx + \omega^2\Sigma mzy$$

$$\dot{K}_y = -\dot{\omega}\Sigma myz - \omega\Sigma m\dot{y}z = -\dot{\omega}\Sigma myz - \omega^2\Sigma mzx$$

$$\dot{K}_z = I\dot{\omega}.$$

Ecuaţiile (4) şi (5) devin cu aceste formule:

$$(6)\quad \begin{cases} -\omega^2\Sigma mx - \dot{\omega}\Sigma my = X + R_x + R'_x, \\ -\omega^2\Sigma my + \dot{\omega}\Sigma mx = Y + R_y + R'_y, \\ O = Z + R_z + R'_z, \\ \omega^2\Sigma myz - \dot{\omega}\Sigma mzx = L - hR'_z, \\ -\omega^2\Sigma mzx - \dot{\omega}\Sigma myz = M + hR'_x, \\ I\dot{\omega} = N. \end{cases}$$

Primele cinci ecuaţii din (6) le vom folosi pentru determinarea proiecţiunilor reacţiilor $\overline{R}$ şi $\overline{R'}$.

Observăm că valorile acestor proiecţiuni, conţin termeni cu ω, deci reacţiunile depind de vitesa unghiulară de rotaţie.

Pentruca să nu mai avem această dependenţă, va trebui să impunem condiţiunile:

$$(7)\quad \Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0,$$

adică pentruca reacţiunile să nu depindă de vitesa rotaţiei unghiulare ω trebue şi este suficient ca axa Oz de rotaţie să fie o axă principală de inerţie relativ la punctul O şi să treacă prin centrul de greutate al solidului.

Axă permanentă şi axă spontană de rotaţie. Revenind la cazul general al rotaţiei, aşa dar când relaţiile (7) nu sunt îndeplinite, vom încerca o particularizare a sistemului de forţe care lucrează asupra solidului. Vom presupune anume că avem:

$$(8)\quad L = 0, \quad M = 0,$$

adică suma momentelor forţelor faţă de Ox este nulă; de asemeni faţă de Oy. Inspectând ecuaţiile (6) vedem că dacă mai avem şi relaţiile:

$$(9)\quad \Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0,$$

atunci proiecţiunile R'_x şi R'_y ale reacţiunii $\overline{R'}$ sunt nule. De altfel proiecţiunea pe Oz a reacţiunii $\overline{R'}$ rămâne nedeterminată, valoarea ei fiind legată d valoarea proecţiunii R_z prin suma $R_z + R'_z$, înc vom putea lua $R'_z = 0$. Deducem că dacă relaţi nile (8) şi (9) sunt îndeplinite, adică dacă Oz es axa principală de inerţie relativ la punctul O i sistemul de forţe efectiv aplicate au momente r zultante nule faţă de Ox şi faţă de Oy, atun toată reacţiunea axei de rotaţie se reduce la rea ţiunea $\overline{R}$ a punctului O. Cu alte cuvinte, o rot ţie a solidului începută în jurul unei axe prin pale de inerţie având un punct fix O, se contin ca şi cum toată axa ar fi fixă, dacă forţele crând efectiv asupra solidului sunt supuse con ţiunilor (8).

O atare axă în solid se numeşte o *axă perm nentă de rotaţie.*

Dacă pe lângă condiţiunile (8) şi (9) mai imp nem şi condiţiunile:

$$(10)\quad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

$$(11)\quad \Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0,$$

atunci din (6) deducem că şi reacţiunea $\overline{R}$ este nu adică axa Oz este fixată în spaţiu fără a fi sp jinită în vre-un punct al ei. Observând că con ţiunile (11) ne spun că Oz trece prin centrul greutate al solidului, vom putea enunţa următ rea proprietate:

O axă centrală de inerţie este axă de rot fără nici un punct de sprijin dacă forţele ef tiv aplicate reduse într'un punct oarecare al ne dau un vector rezultant $\overline{R}$ nul şi un mom rezultant $\overline{M}$ în lungul axei.

O atare axă se numeşte o *axă spontană de taţie.* Existenţa ei exige împlinirea tuturor co ţiunilor (8), (9), (10) şi (11) adică ea trebue să axă centrală iar forţele efectiv aplicate trebue se reducă la un cuplu unic având axa para cu Oz.

Reacţiunile în cazul pendulului fizic. Să r nim acum la ecuaţiile generale (6) aplicându-l cazul pendulului fizic. Vom înlocui în aceste e ţiuni pe Σmx şi Σmy respectiv prin $M\xi$ şi ξ şi η fiind coordonatele proiecţiunii centrulu greutate pe planul xOy. Vom presupune apo axa de suspensie Oz este o axă principală inerţie. Având deci condiţiunile (8) şi (9) înd

nite rezultă axa de suspensie se sprijină numai în punctul O unde reacțiunea $\bar{R}$ poate fi considerată toată dirijată în planul xOy din cauza ecuațiunii a treia din (6). Ne rămân deci de determinat mărimele R_x și R_y pentru care primele două ecuațiuni din (6) ne dau:

$$R_x = -X - \omega^2 M\xi - \dot{\omega} M\eta,$$

$$R_y = -Y - \omega^2 M\omega + \dot{\omega} M\xi.$$

Până aici n'am particularizat încă direcțiile axelor Ox și Oy. Vom lua drept axă Ox direcția OC; astfel poziția axei Oy este determinată. Insemnând cu R_1 și R_2 proecțiunile reacțiunii $\bar{R}$ pe aceste noi axe, și observând că X și Y sunt respectiv $Mg\cos\theta$ și $-Mg\sin\theta$, ecuațiile precedente devin:

$$(12)\quad \begin{cases} R_1 = -Mg\cos\theta - \omega^2 Ml, \\ R_2 = Mg\sin\theta + \dot{\omega} Ml. \end{cases}$$

Din ecuația de mișcare a pendulului:

$$I\dot{\omega} = -Mgl\sin\theta,$$

avem însă:

$$\dot{\omega} = -\frac{Mgl}{I}\sin\theta,$$

de unde deducem:

$$\omega\dot{\omega} = -\frac{Mgl}{I}\sin\theta\,.\,\dot{\theta},$$

sau integrând în raport cu timpul t:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{Mgl}{I}\cos\theta + C.$$

C înseamnă o constantă de integrare.

Introducând în (12) valorile lui $\dot{\omega}$ și ω^2, vom avea:

$$R_1 = -Mg\cos\theta - 2\frac{M^2 g l^2}{I}\cos\theta + 2CMl,$$

$$R_2 = Mg\sin\theta - \frac{M^2 g l^2}{I}\sin\theta,$$

sau, ținând seama de formulele cunoscute din teoria pendulului fizic:

$$I = Ml\,l', \qquad l' - l = \frac{I_0}{Ml},$$

relațiile precedente devin:

$$(13)\quad \begin{cases} R_1 = -2MCl - \dfrac{Mg(l'+2l)}{l'}\cos\theta, \\ R_2 = Mg\dfrac{I_0}{I}\sin\theta. \end{cases}$$

Valorile mărimelor R_1 și R_2 ne arată că aceste componente ale reacțiunilor sunt niște funcțiuni periodice de timp.

R_2 adică proecțiunea reacțiunii pe normala la OC este independentă de condițiunile inițiale.

Valoarea sa maximă este $\frac{MI_0 g}{I}$, iar cea minimă $-\frac{MI_0 g}{I}$. Variațiunea lui R_2 în funcțiune de θ poate fi reprezentată printr'o *sinusoidă* (Fig. 3).

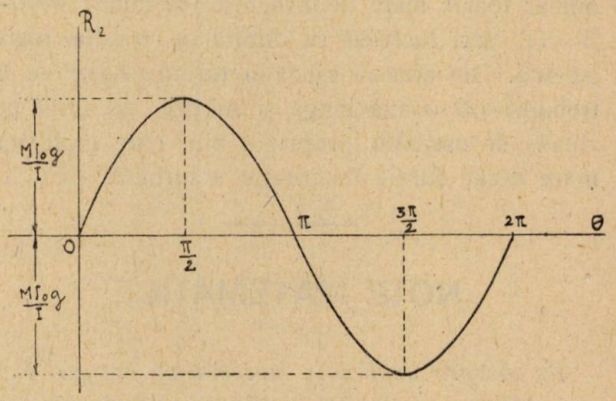


Fig. 3.

R_1 depinde și de constanta de integrare C care are valoarea:

$$\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{Mgl}{I}\cos\theta_0,$$

determinată prin valorile inițiale θ_0 și ω_0 ale unghiului θ și ale vitesei unghiulare de rotație.

Variația ei se poate reprezenta grafic de asemeni cu ajutorul unei *sinusoide*.

Un caz important în tehnică este cazul când solidul se rotește într'un singur sens. Pentru aceasta pendulul fizic va trebui să fie supus condiției inițiale:

$$C > \frac{Mgl}{I}.$$

In acest caz reacțiunea $\bar{R}$ are deci o variație continuă, periodică prezentând maxime și minime

periodice cu perioada 2π pentru θ. Rezultă de aici că vom avea smunciturі asupra axei la fiecare rotaţie de unghiul 2π a solidului. Dacă se întâmplă ca perioada T de rotaţie să coincidă cu perioada vibraţiilor proprii ale axei, atunci avem realizate condiţiunile fenomenului *rezonanţei*. Oscilaţiunile axei capătă amplitudini din ce în ce mai mari ameninţând cu ruperea. Numărul de învârtituri corespunzător rezonanţei se chiamă în technică *numărul critic de învârtituri*.

Pentru a se evita fenomenul rezonanţei se obicinueşte a se construi axa de ajuns de groasă pentruca perioada ei de oscilaţie proprie să fie mult mai mică decât durata unei rotaţii. Acest lucru însă nu este posibil la turbinele *Laval* care, în scopul unei întrebuinţări raţionale a vaporilor, au nevoe de un număr foarte mare de învârtituri pe minut (9000—30.000) deci lucrează cu durată de rotaţie foarte scăzută. Din această cauză în turbina *Laval* se întrebuinţează o axă lungă şi subţire, aşa încât perioada de oscilaţie proprie a axei este mult mai mare decât durata de rotaţie a turbinei.

NOTE MATEMATICE

25. *Asupra unei note matematice.* In „G. M.“, vol. XXX, p. 256, d-l *M. Adam,* vrea să calculeze limita expresiei:

$$\frac{\log^{\alpha}(n+q)\log^{\beta}(1+k_1)(2+k_2)\ldots(n+k_n)}{(n+m_1)(n+m_2)\ldots(n+m_n)},$$

când $n\to\infty$, $k.\ k_i,\ m_i (i=1,\ 2,\ldots n)$ *„fiind constante oarecare“*. E evident că dacă nu ştim nimic despre k_n, m_n nu putem calcula această limită.

D-l *Adam* scrie:

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty} y_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(1+k_1)(2+k_2)\ldots(n+k_n)}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Insă:

$$\lim_{n\to\infty} y_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n+k_n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k_n}{n}\right)$$

(1) e exact numai dacă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{n}=0.$$

D-l *Adam* scrie apoi:

$$\lim_{n\to\infty} y_3 = \lim_{n\to\infty}\frac{\log^{\alpha}(n+k)\log n^n}{(n+m_1)(n+m_2)\ldots(n+m_n)} = 0,$$

care iarăşi nu e totdeauna exact. E destul a determina $m_1,\ m_2,\ldots m_n$ prin ecuaţiile:

$$(n+m_1)(n+m_2),\ldots(n+m_n)=n$$

$$n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

pentru a avea $(\alpha>-1)$.

$$\lim_{n\to\infty} y_3=\infty.$$

T. P.

26. *Asupra unei probleme de aritmetică.* In problema 3111, din „G. M.“, se cer numerele prime a astfel ca:

$$\varphi_{a+2}(a^{\alpha})=1,$$

φ_i (I) fiind indicatorul de ordinul i a lui I. Soluţia din vol. XXX, p. 146, e greşită.

Nu avem deloc:

$$(1)\qquad \alpha=a+2,$$

cum se spune în „G. M“. Intradevăr $\varphi_a(a^{\alpha})$ se divide cu $(a-1)$ care nu e egal cu 1 decât dacă $a=2$. Relaţia (1) nu poate fi deci adevărată pentru $a>2$; ea e de altfel exactă când $a=2$. Obţinem astfel soluţia:

$$\varphi_4(2^4)=1$$

din „G. M“. Există însă probabil o infinitate de soluţiuni. Pentru $a<100$. avem soluţiile:

$$\varphi_5(3^4)=1,\quad \varphi_7(5^3)=1,\quad \varphi_9(7^4)=1,\quad \varphi_{13}(11^4)=1$$

$$\varphi_{25}(23^6)=1,\quad \varphi_{33}(31^8)=1,\quad \varphi_{45}(43^{11})=1,$$

$$\varphi_{61}(59^{12})=1,\quad \varphi_{81}(79^{16})=1,\quad \varphi_{85}(83^{14})=1,$$

$$\varphi_{91}(89^{15})=1.$$

Generalizarea d-lui *Tauber* prin:

$$\varphi_{\alpha+\beta}(a^{\alpha})=1,$$

deasemenea greşită, căci d-sa se bazează pe o inegalitate greşită.

Pentru $\beta=3$ şi $a<100$ avem:

$$\varphi_5(2^5)=1,\quad \varphi_6(3^5)=1,\quad \varphi_{16}(13^5)=1,\quad \varphi_{22}(19^7)=1$$

$$\varphi_{56}(53^{11})=1,\quad \varphi_{76}(73^{15})=1$$

şi există probabil o infinitate pentru $a>100$.

Cazul $\beta = 1$, e foarte interesant. *Avem numai două soluții:*

$$\varphi_3(2^3) = 1, \quad \varphi_4(3^3) = 1.$$

Demonstrația e prea delicată însă pentru a putea fi expusă aci. La finele problemei d-l Căpitan *I. Linteș*, își propune problema de a determina numărul prim a, astfel ca:

$$\varphi_{\alpha+2}(a^\alpha) = 1.$$

E nevoe să facem o mică completare.

Avem:

$$\varphi_\alpha(a^\alpha) = (a-1)b,$$

b fiind un număr întreg. Apoi în virtutea condiției (2):

$$\varphi_2\big((a-1)b\big) = 1,$$

deci:

$$\varphi[(a-1)b] = 2,$$

și prin urmare:

$$(a-1)b = 3, 4 \quad \text{sau} \quad 6,$$

3 nu convine evident (căci ar trebui $\alpha = 0$). Avem deci:

$$(a-1)b = 4 \quad \text{sau} \quad 6,$$

a poate fi deci 2, 3, 5, 7. Dar:

$$\varphi_\alpha(2^\alpha) = 1, \quad \varphi_{\alpha+1}(3^\alpha) = 1, \quad \varphi_{2\alpha+1}(5^\alpha) = 1,$$

$$\varphi_{2\alpha+1}(7^\alpha) = 1.$$

Așa dar numai următoarele *două* soluțiuni:

$$\varphi_3(5) = 1, \quad \varphi_3(7) = 1.$$

TIB. POPOVICIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, an. XXXV, No. 4, Decembrie 1929. Activitatea științifică a lui *Traian Lalescu*, de *M. Ghermănescu*. Cercles remarquables du triangle, par *V. Thébault*. Construcția conicelor, de *Gh. Constantinescu*,

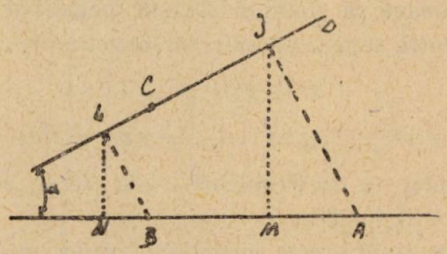
2. *Radu Lazăr Bădescu*. Recherches sur une équation intégrale linéaire. (Thése).

PROBLEME REZOLVATE

798. — *Fie* A, B, C *trei puncte în același plan. Prin* C *se duce o dreaptă* CD *care face cu* AB *un unghiu* α. I, L *fiind proecțiile punctelor* A *și* B *pe* CD, *iar* M, N *proecțiile punctelor* I *și* L *pe* AB, *să se arate că lungimea segmentului* MN *este independentă de poziția punctului* C *în plan.*

JUSTIN N. VALCEANU

Problema este evidentă. Dacă α este constant iar A și B fixe atunci IL este proecția unui segment constant AB pe o dreaptă Δ de direcție dată,



deci IL este constant. Dar atunci MN este proecția unui segment constant IL pe o dreaptă fixă AB, deci MN este constant.

Observațiuni. 1°. Au stabilit relațiunea:

$$MN = AB\cos^2\alpha,$$

d-nii: *Aldea N.* (absolvent, lic. M-rea Dealu), *Grossu I. M.* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu-Țiu D. C.* (Șc, Milit. de Geniu), *Negrea A. M. L.* (student, București), *Scarlat D.* (Șc. Navală Constanța), *Schuller D.* (absolvent, Bacău), *Vonica C. I.* (Tg.-Cărbunești), *Zagaican I.* (Conductor, lucrări publice, Bălți).

2°. A rezolvat problema utilizând triunghiuri asemeni d-l *Vasiliu Gh. Gh.* (Leoben, Austria).

3°. O bună, dar lungă solutie cu ajutorul proprietății, paralelelor, a dat d-l *Mihalcea E.* (student).

4°. D-l *Hamerak C.* (Caransebeș), a dat o soluție analitică.

5°. Alte soluții bune date de d-nii: *Carp Ig.* (absolv. liceu) *Firoiu I.* (lic. Arad) și *Nichiforescu Gh.* (Iași).

Au mai trimes soluții d-nii: *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Brotmann I.* (bacalaureat, București), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (Șc. Polit, București), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Technici, Cluj) și *Vâlsănescu Viorel* (student).

829. — *Să se demonstreze inegalitatea:*

$$\frac{x^2-xy+y^2}{(y+z)(z+x)}+\frac{y^2-yz+z^2}{(z+x)(x+y)}+\frac{z^2-zx+x^2}{(x+y)(y+z)}\geqq\frac{3}{4}$$

cătimele z, y, z fiind reale și pozitive.

CEZAR COSNITA.

Observând că:

$$x^2-xy+y^2=\frac{x^3+y^3}{x+y},$$

inegalitatea dată devine:

$$\frac{x^3+y^3+y^3+z^3+z^3+x^3}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geqq\frac{3}{4},$$

sau:

(1) $\quad 8(x^3+y^3+z^3)\geqq 3(x+y)(y+z)(z+x).$

Rămâne să stabilim această inegalitate:

Pentru aceasta considerăm inegalitățile cunoscute:

$$x^3+y^3+z^3\geqq 3xyz$$

$$2(x^3+y^3+z^3)\geqq xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z).$$

(Culegere de Probleme", pag. 28 și „R. M. T.", vol. VIII, p. 67).

Inmulțind aceste inegalități prima cu 2 și 2-a cu 3 și adunându-le obținem:

$$8(x^3+y^3+z^3)\geqq$$

$$3[xy(x+y)+yz(y+z)+xz(x+z)+2xyz],$$

sau:

$$8(x^3+y^3+z^3)\geqq 3(x+y)(y+z)(z+x),$$

adică tocmai inegalitatea (1).

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petru* (bacalaureat, Caransebeș), *Brotmann I.* (bacalaureat, București), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Mil. de Geniu), *Marineanu Traian* (student, București), *Negrea A. Mircea Leonte* (student), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara) și *Vâlceanu N. Justin* (Șc. Polit., Timișoara).

Au mai trimes soluții d-nii: *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina) și *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina).

Observare. 1°. D-l *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), a dat o generalizare, care se va publica sub formă de notă.

2°. S'au primit două soluții neriguroase.

830. — *Să se rezolve ecuația:*

$$x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=x+x^{-1}.$$

IG. I. CARP

Dacă notăm:

(1) $\quad \sqrt[4]{x}=y,$

ecuația dată devine:

(2) $\quad y+\frac{1}{y}=y^4+\frac{1}{y^4}.$

Notând iar:

(3) $\quad y+\frac{1}{y}=z.$

atunci:

$$y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2,$$

deci:

$$y^4+\frac{1}{y^4}=z^4-4z^2+2,$$

și ecuația (2) devine:

(4) $\quad z^4-4z^2-z+2=0.$

Primul membru anulându-se pentru, $z=-1$ și $z=2$, ecuația (4) se poate scri:

$$(z+1)(z-2)(z^2+z-1)=0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$z_1=-1,\quad z_2=2,\quad z_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Atunci din (3) deducem:

$$y^2+y+1=0,\quad y^2-2y+1=0,$$

$$2y^2+(1-\sqrt{5})y+2=0,\quad 2y^2+(1+\sqrt{5})y+2=0$$

cu rădăcinele:

$$y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},\qquad y_{3,4}=1,$$

$$y_{5,6}=\frac{\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$y_{7,8}=\frac{-\sqrt{5}-1\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Pentru a afla pe x ridicăm la puterea 4-a relația (1), după ce înlocuim pe y prin valorile găsite, găsim:

$$x=y_i^4\qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots 8).$$

Singura valoare întreagă este:

$$x = 1.$$

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petre* (bacalaureat, Caransebeș), *Cuciureanu Șt.* (Șc. Milit., Iași), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Ioanițescu Gh. D-tru* (lic. Milit., Iași), *Negrea A. Mircea-Leonte* (student), *Patron M.* (lic. Milit,, Iași), *Petrescu Traian* (lic. Milit., Iași) și *Tutoveanu Valeriu* (student).

Altă soluție. Notăm, (1) $\sqrt[4]{x} = y$, atunci ecuația dată devine:

$$y + \frac{1}{y} = y^4 + \frac{1}{y^4}$$

$$\therefore \quad y^8 - y^5 - y^3 + 1 = 0,$$

sau:

$$(y^3 - 1)(y^5 - 1) = 0.$$

Avem deci ecuațiile binoame:

$$y^3 - 1 = 0, \quad y^5 - 1 = 0,$$

cu rădăcinele:

$$y = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2$$

$$y = \cos\frac{2k_1\pi}{5} + i\sin\frac{2k_1\pi}{5}, \qquad k_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Inlocuind aceste valori în ecuația (1), pe care o ridicăm la puterea 4-a, deducem:

$$x = \cos\frac{8k\pi}{3} + i\sin\frac{8k\pi}{3}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2.$$

$$x = \cos\frac{8k_1\pi}{5} + \cos\frac{8k_1\pi}{5}, \qquad k_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Soluții date de d-nii: *David Lucian* (Șc. Polit., Timișoara), *Dăscălescu Hristache* (student, București), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Mătieș V. Ion* (student, Cluj), *Murăroiu I.* (bacalaureat, Brașov), *Petrovici D.* (student), *Popescu O. Ion* (absolvent, Calafat), *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara) și *Vâlceanu N. Justin* (Șc. Polit., Timișoara).

Alte soluții, date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit., Iași), *Bâcicov Boris* (bacalaureat, Tighina), *Brotmann I.* (absolvent, București), *Capră Alexandru* (Dorohoiu), *Coșniță Cezar* (Bârlad), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Marineanu Traian* (student, București), *Mereuță Emil* (lic. Piatra-Neamț), *Millea G. Ene* (R.-Sărat), *Paliță C.* (lic. Milit., Iași), *Popescu D. Nicolae* (bacalaureat), *Schuller David* (absolvent, Bacău), și *Teodorescu Stavrache* (lic. Milit., Iași).

Au mai trimis soluții d-nii: *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București) și *Popa Șt. Ioan* (lic. Oltenița).

Observare. 1°. D-l *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), a generalizat problema, rezolvând ecuația:

$$x^{\frac{1}{n}} + x^{-\frac{1}{n}} = x + x^{-1}.$$

2°. Câteva soluții fiind grav eronate, au fost înlăturate.

831. — *Să se demonstreze că dacă* x_1, x_2 *și* $x_1 x_2$ *sunt rădăcinele ecuației:*

$$x^3 + p x^2 + q x + r = 0,$$

atunci x_1 *și* x_2 *sunt rădăcinele ecuației:*

$$(p-1)x^3 - [q - r + p(1-p)]x - (q-r) = 0,$$

iar p, q, r, *sunt legați prin relația:*

$$r(p-1)^2 + (q-r)^2 = 0.$$

Să se examineze cazul particular când p *este egal cu unitatea.*

COL. GH. BUICLIU

Relațiile cunoscute dintre rădăcinile și coeficienții unei ecuații ne permit a scrie:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_1 x_2 = -p \\ x_1 x_2 + x_1 x_2 (x_1 + x_2) = q \\ x_1^2 x_2^2 = -r. \end{cases}$$

Din prima relație deducem:

$$(2) \qquad x_1 + x_2 = -p - x_1 x_2,$$

și înlocuind în a 2-a, avem:

$$x_1 x_2 - p x_1 x_2 - x_1^2 x_2^2 = q,$$

sau:

$$x_1 x_2 (1-p) = q - r$$

$$(3) \qquad \therefore \quad x_1 x_2 = \frac{q-r}{1-p},$$

care înlocuită în (2), ne dă:

$$(4) \qquad x_1 + x_2 = -p - \frac{q-r}{1-p} = \frac{p(1-p) + q - r}{p-1}.$$

Relațiile (4) și (3) ne dau suma și produsul lui x_1 și x_2, și atunci ecuația care are x_1, x_2 ca rădăcini, este:

$$x^2 - \frac{q - r + p(1-p)}{p-1}x + \frac{r-q}{p-1} = 0,$$

sau:

$$(p-1)x^2-[q-r+p(1-p)]x-(q-r)=0,$$

tocmai ecuația cerută.

Relația de condiție se obține egalând valoarea lui $x_1 x_2$, scoasă din a 3-a relație din (1), cu acea dată de (3), avem astfel:

$$\sqrt{-r}=\frac{q-r}{1-p} \qquad \text{sau:} \qquad -r=\frac{(q-r)^2}{(p-1)^2},$$

$$\therefore \quad r(p-1)^2+(q-r)^2=0,$$

tocmai relația cerută prin enunț.

Dacă $p=1$, relațiile (1) devin:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_1x_2=-1 \\ x_1x_2(1+x_1+x_2)=p \\ x_1^2x_2^2=-r. \end{cases}$$

Din prima deducem:

$$x_1=-\frac{1+x_2}{1+x_2}=-1,$$

valoare care introdusă în celelalte două ne dau:

$$-x_2^2=q$$

$$x_2^2=-r,$$

deci, $q=r$ și $x_2=\pm i\sqrt{q}$.

Atunci, avem:

$$x_1=-1, \quad x_2=\pm i\sqrt{q}.$$

Ecuația care are aceste rădăcini, este:

$$x^2+(1\mp i\sqrt{q})x\mp i\sqrt{q}=0.$$

Ecuația dată de gradul trei, devine în acest caz:

$$x^3+x^2+qx+q=0,$$

cu rădăcinele:

$$x_1=-1, \quad x_2=\pm i\sqrt{q}, \quad x_1x_2=\mp i\sqrt{q}.$$

Soluții date de d-nii: *Almăjan Petre* (bacalaureat, Caransebeș), *Bâcicov Boris* (bacalaureat, Tighina), *Brotmann I.* (absolvent, București), *Coșniță Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galați), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu-Țiu D. C-tin* (Șc. Milit. de Geniu), *Marineanu Traian* (student, București), *Mătieș V. Ion* (student, Cluj), *Murăroiu I.* (bacalaureat, Brașov), *Petrovici D.* (Câmpina), *Tutoveanu Valeriu* (student) *Schuller David* (absolvent, Bacău), *Țiucra Mircea* (Șc. Polit., Timișoara) și *Vâlceanu N. Iustin* (Șc. Polit., Timișoara).

A mai trimes soluții d-l: *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București).

833. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \dfrac{a\operatorname{arc\,tg}x}{k_1}=\dfrac{b\operatorname{arc\,tg}y}{k_2}=\dfrac{c\operatorname{arc\,tg}z}{k_3} \\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}=k_4\pi. \end{cases}$$

k_1, k_2, k_3, k_4, pot avea una din valorile 1, 2, 3, ... n.

Caz particular, $a=b=c=k_1=k_2=k_3=k_4=1$.

ION MARGINEANU

Notăm:

$$\operatorname{arc\,tg}x=u, \quad \operatorname{arc\,tg}y=v, \quad \operatorname{arc\,tg}z=t,$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}=\omega.$$

De aci deducem:

$$x=\operatorname{tg}u, \quad y=\operatorname{tg}v, \quad z=\operatorname{tg}t,$$

$$(1) \qquad \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}=\operatorname{tg}\omega.$$

Inlocuind valorile lui x, y, z, în ultima relație, avem:

$$\frac{\operatorname{tg}u+\operatorname{tg}v+\operatorname{tg}t-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v\operatorname{tg}z}{1-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}v-\operatorname{tg}u\operatorname{tg}t-\operatorname{tg}v\operatorname{tg}t}=\operatorname{tg}\omega.$$

Cum primul membru reprezintă dezvoltarea lui, $\operatorname{tg}(u+v+t)$, rezultă:

$$\operatorname{tg}(u+v+t)=\operatorname{tg}\omega$$

$$\therefore \quad u+v+t=k_5\pi+\omega.$$

Cum:

$$\omega=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}=k_4\pi,$$

rezultă:

$$u+v+t=(k_5+k_4)\pi=k\pi.$$

Sistemul dat devine astfel:

$$\begin{cases} \dfrac{au}{k_1}=\dfrac{bv}{k_2}=\dfrac{ct}{k_3} \\ u+v+t=k\pi. \end{cases}$$

Să rezolvăm acest sistem. Putem scri:

$$\frac{u}{\frac{k_1}{a}} = \frac{v}{\frac{k_2}{b}} = \frac{t}{\frac{k_3}{c}} = \frac{u+v+t}{\frac{k_1}{a}+\frac{k_2}{b}+\frac{k_3}{c}} = \frac{k\pi abc}{k_1 bc + k_2 ac + k_3 ab}.$$

De aci deducem:

$$u = \frac{k_1 k\pi bc}{k_1 bc + k_2 ac + k_3 ab},$$

$$v = \frac{k_2 k\pi ac}{k_1 bc + k_2 ac + k_3 ab},$$

$$\omega = \frac{k_3 k\pi ab}{k_1 bc + k_2 ac + k_3 ab},$$

Ţinând seamă de (1) găsim valorile lui x, y, z, anume:

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} \dfrac{k_1 k\pi bc}{k_1 bc + k_2 ac + k_3 ab} \\ y = \operatorname{tg} \dfrac{k_2 k\pi ac}{k_1 bc + k_2 ac + k_3 ab} \\ z = \operatorname{tg} \dfrac{k_3 k\pi ab}{k_1 bc + k_2 ac + k_3 ab} \end{cases}$$

Cazul particular:

Dacă: $a = b = c = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$,

găsim:

$$x = y = z = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{3}, \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots n).$$

Dând lui k valorile 0, 1, 2, 3, ... n, singurele sisteme de valori pentru x, y, z sunt:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = z_1 = 0 \\ x_2 = y_2 = z_2 = \sqrt{3} \\ x_3 = y_3 = z_3 = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Soluţie redactată după acea dată de d-l *Vâlceanu N. Justin* (Şc. Polit., Timişoara).

Soluţii analoage date de d-nii: *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Dimitriu At. Ioan* (absolvent, Galaţi), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, Bucureşti), *Grossu I. Mircea* (lic. Carol, Craiova), *Ionescu-Ţiu D. C-tin* (Şc. Milit. de Geniu), *Hamerak Carol* (Caransebeş), *Mircea Leonte A. Negrea* (student, Bucureşti), *Petrovici D.* (student) şi *Schuller David* (Bacău).

A mai trimis soluţii d-l: *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina).

Observare. D-l *Coşniţă Cezar* (Bârlad) a considerat şi sistemul mai general:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1 \operatorname{arc\,tg} x_1}{k_1} = \dfrac{a_2 \operatorname{arc\,tg} x_2}{k_2} = \ldots = \dfrac{a_n \operatorname{arc\,tg} x_n}{k_n} \\ \operatorname{arc\,tg} \dfrac{T_1 - T_3 + T_5 - T_7 + \ldots}{1 - T_2 + T_4 - T_5 + \ldots} = k_{n+1}\pi \end{cases}$$

unde:

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad T_2 = \Sigma x_i x_j, \ldots$$

842 — *Să se arate că expresia:*

$$3740356^{20} + 1934^{24} - 1934^4 - 1,$$

se divide prin 143.

VLADIMIR I. CRIVAT.

Se constată că:

$$3740356 = 293^2 \quad \text{şi} \quad 143 = 11 \times 13,$$

astfel că expresia dată t se poate scri:

$$E = 1934^{40} + 1934^{24} - 1934^4 - 1.$$

Folosim teorema lui *Fermat* care spune că, *p fiind prim şi a un număr nedivizibil cu p, avem:*

$$a^{p-1} - 1 = m \cdot p.$$

In virtutea acestei teoreme avem:

$$E = (m\,11 + 1)^4 + 1934^4 (1934^{20} - 1) - 1 =$$
$$(m\,11 + 1)^4 + 1934 [(m\,11 + 1)^3 - 1] - 1 =$$
$$m\,11 + 1 - 1 = m\,11,$$

Tot astfel:

$$E = 1934^4 (1934^{36} - 1) + 1934^{24} - 1 =$$
$$1934^4 [(m\,13 + 1)^3 - 1] + (m\,13 + 1)^2 - 1 =$$
$$m\,13 + 1 - 1 = m\,13.$$

Expresia dată fiind estfel divizibilă cu factorii primi 11 şi 13, este divizibilă şi cu produsul lor 143.

Soluţii date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit., Iaşi), *Boerescu P. George* (lic. Oltenita), *Chirilă Gheorghe* (lic. Milit., Iaşi), *Dăscălesu Şt. Hristache* (Şc. Polit., Bucureşti), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, Bucureşti), *Grecu M. Cristache* (lic. Oltenita), *Ioaniţescu G. D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Mihăileanu N. Nicolae* (lic. Constanţa), *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit., Iaşi), *Patron M.* (lic. Milit., Iaşi), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita). *Popescu Gh. Gheorghe* (lic. Milit., Iaşi), *Scarlat D.* (Şc.

Navală, Constanța), *Șerban-Ulmeni D. și Teodorescu Șt.* (lic. Milit., Iași).

A mai trimes soluții d-l: *Mereuță Emil* (absolvent, lic. P.-Neamț.

844[1]). — *Să se arate că dacă a și b sunt pozitivi, ecuația:*

$$2a(a+b)x^2+(a+b)^2x-2ab^2=0,$$

are rădăcini reale.

Asemeni, dacă a este negativ, ecuația:

$$4x^2+4(1+a+a^2)x+1+a^2+a^4=0,$$

are rădăcini imaginare.

D. SCARLAT

Realizantul primei ecuații, este:

$$(a+b)^4+16a^2b^2(a+b)$$

a și b fiind pozitivi, rezultă că:

$$(a+b)^4+16a^2b^2(a+b)>0,$$

ambele părți fiind pozitive.

Prima ecuație are deci rădăcini reale.

Realizantul celei de a 2-a ecuații, este:

$$4(1+a+a^2)^2-4(1+a^2+a^4)=16a(1+a+a^2).$$

Cum, $a<0$, rezultă $1+a+a^2>0$ și deci:

$$16a(1+a+a^2)<0.$$

Ecuația a 2-a are deci rădăcini imaginare.

Soluții date de d-nii: *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit, Iași), *Mereuță Emil* (lic. Piatra-Neamț), *Mihăileanu Nicolae* (lic. Constanța), *Negrea A. Mircea-Leonte* (student, București), *Patron M.* (lic. Milit., Iași) și *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița),

Au mai trimes soluții d-nii: *Boerescu P. George* (lic. Oltenița) și *Nichiforescu Gh.* (Iași).

PROBLEME PROPUSE

872. — Să se găsească numerile prime de patru cifre $abcd$, astfel ca cifra doua și a patra, să fie consecutive, iar numărul $dcba$ să fie patrat perfect.

TRAIAN MARINEANU

873. — Se cer patratele perfecte $abcada$ în care ac și ba sunt patrate perfecte.

GEORGE P. BOERESCU

1) Enunț rectificat.

874. — Dintr'un punct fix O se duc două drepte Δ și Δ', care fac un unghiu α. Ele tae o dreaptă dată Δ'' în punctele A și B. Punctul P fiind proecția lui B pe dreapta Δ și P' a lui A pe Δ'.

1. Să se afle locul punctelor P și P', când dreptele Δ și Δ' se rotesc în jurul lui O.

D. SCARLAT.

875. — Se dă dreptunghiul ABCD și fie EF și GH dreptele ce unesc mijloacele laturilor opuse, O punctul lor de intersecție. Fie M, N, P centrele dreptunghiurilor EBHO, OHCF, OFDG și fie încă R și S mijloacele lui OF și OH. Să se dovedească că dreptele MR și PS trec prin punctul de intersecție al medianelor triunghiului MNP.

V. ALACI

876. — Să se pună polinomul:

$$2x^3-15x^2+78x-92,$$

sub forma:

$$A(x+a)^3+B(x-b)^3.$$

CEZAR COSNITA

877. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} xy(xy+yz+zx)=a^2 \\ yz(yz+zx+xy)=b^2 \\ zx(zx+xy+yz)=c^2. \end{cases}$$

I. NICOLAU-DOBRIDOR

878. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1\operatorname{arctg}x_1}{k_1}=\dfrac{a_2\operatorname{arctg}x_2}{k_2}=\ldots=\dfrac{a_n\operatorname{arctg}x_n}{k_n} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3}+\ldots\ldots \\ +\operatorname{arctg}\dfrac{x_{n-2}+x_{n-1}+x_n-x_{n-2}x_{n-1}x_n}{1-x_{n-2}x_{n-1}-x_{n-2}x_n-x_{n-1}x_n}=k_{n+1}\pi \end{cases}$$

unde $n=3p$, iar $a_1, a_2, \ldots a_n, k_1, k_2 \ldots k_{n+1}$, pot avea una din valorile $1, 2, \ldots n$.

ION MARGINEANU

INFORMAȚIUNI

Recomandăm călduros corespondenților noștri, cartea *„Gândirea Matematică“* a d-lui profesor universitar *Petre Sergescu*, premiată de *Academia Română*.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul VIII, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul VII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

Sucursala Timişoara

ANUL IX. 15 FEBRUARIE 1930 No. 12

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. C. IONESCU-BUJOR. EXTINDERI IN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI.
2. NOTE MATEMATICE, 27, 28.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 839, 841, 845 848 849,.
5 PROBLEME PROPUSE.
6 TABLA DE MATERII.
7. TABLOUL NUMELOR.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Str. General Foch No. 27.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 100 lei.
Anul III, broşat, 100 lei.
Anul IV, broşat, 100 lei.
Anul V, broşat, 100 lei.
Anul VI, broşat, 100 lei.
Anul VII, broşat, 100 lei.
Anul VIII, broşat, 100 lei.

ANUL IX — NO. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1930.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI, Str. Gen. Foch 27 Timișoara
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara

EXTINDERI IN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

de C. IONESCU-BUJOR

IV. *Sistemul centrului de greutate.*

Sistemul de elemente geometrice și proprietăți determinat de un triunghiu A B C și de centrul său de greutate, prezintă interes prin chiar natura sa comprimată, dar și prin desvăluirea unor relații între elemente cunoscute, printr'o nouă deducție a acestor elemente.

Vom înfățișa o regiune a acestui sistem.

Se vede fără greutate cum centrul conicei circumscrise a sistemului este chiar în centrul de greutate G, încât:

„*Conica circumscrisă a sistemului* (A B C, G) *este elipsa lui Steiner*".

Punctele I, J în care elipsa lui *Steiner* întâlnește dreapta dela infinit, sunt puncte absolute pentru sistem. Prin aceste puncte trec toate conicele I ale sistemului, conice având axele paralele cu acele ale elipsei lui *Steiner*.

Așa dar, conica lui *Euler* a sistemului este o elipsă trecând prin punctele I, J și având axele paralele cu acele ale elipsei lui *Steiner* fiindu-i chiar concentrică.

Conica lui *Euler* se confundă cu conica înscrisă a sistemului, de oarece triunghiul complimentar este și triunghiu pedal al punctului de referință. Cum centrul conicei lui *Euler* este G,

„*Triunghiul complimentar este și triunghiu pedal al punctului lui Gergonne în sistemul prezent*".

Conicele lui Lemoine. Urmând definirea punctului lui *Lemoine*, se conchide că G este și punct al lui *Lemoine*, deci:

„Paralelele duse la laturile triunghiului de referință, prin centrul de greutate, întâlnesc laturile în 6 puncte determinând o conică în care se confundă cele două conice ale lui *Lemoine*".

Conica este concentrică elipsei lui *Steiner*. Și avându-se în vedere articolul d-lui *Col. Gh. Buicliu*. „Terțianele unui triunghiu", (R. M. T., vol. VIII, No. 12), se va enunța:

„*Picioarele terțianelor interioare ale unui triunghiu se găsesc pe conicele lui Lemoine ale sistemului centrului de greutate, deci pe o elipsă concentrică, elipsa lui Steiner*".

O teoremă a lui Cesaró. Teorema lui *Simson* aplicată sistemului centrului de greutate conduce la următoarea teoremă a lui *Cesaró* (Mathesis 1893).

„*Paralelele duse dintr'un punct al elipsei lui Steiner la medianele triunghiului de referință, taie laturile opuse în trei puncte colineare*".

Dreapta obținută e dreaptă a lui *Simson* pentru sistem.

∴

Asupra punctelor reciproce. In „*Revista Matematică din Timișoara*", (vol. IX, No. 1), am definit astfel punctele inverse:

„A B C și M fiind cele două elemente de referință, două puncte P, Q ale căror ceviene corespunzătoare determină puncte izotomice pe laturile triunghiului pedal al punctului lui *Gergonne*, sunt puncte inverse ale sistemului M."

Această definiție în prezența rezultatului obținut: „Triunghiul complimentar este și triunghiu pedal al punctului lui *Gergonne*", determină următoarea propoziție:

Punctele reciproce sunt puncte inverse pentru sistemul centrului de greutate".

Iată o afinitate de orientare între punctele reciproce și punctele inverse, care permite desvăluirea

unui şir de proprietăţi ale punctelor reciproce, proprietăţi stabilite pentru punctele inverse în articolele precedente

„M şi N fiind două puncte reciproce, paralelele duse prin M şi N la cevienele centrului de greutate, determină triunghiurile podare $M_a M_b M_c$, $N_a N_b N_c$ înscrise în aceaşi conică J a sistemului punctului G, conică I al cărei centru se află la mijlocul segmentului M N".

„Cevienele punctului M sunt paralele cu diametrii elipsei lui *Steiner* conjugaţi diametrilor paraleli cu laturile respective ale triunghiului $N_a N_b N_c$."

„A′, B′, C′ fiind punctele în care se tae laturile triunghiurilor podare ale punctelor reciproce M şi N, triunghiuri podare luate în sistemul G, cevienele A A′, B B′, C C′ sunt paralele, iar direcţia lor este conjugată direcţiei M N faţă de elipsa lui *Steiner*".

Semnificaţia „direcţiei conjugate" fiind următoarea: direcţia cevienelor şi direcţia M N sunt paralele cu doi diametri conjugaţi.

„Triunghiurile podare, luate în sistemul punctului G, a două puncte reciproce M şi N, îşi intersectează laturile corespunzătoare în A′, B′, C′. Polurile dreptelor A A′, B B′, C C′ în raport cu elipsa lui *Steiner*, se află pe dreapta M N".

Chiar încheiată aci, urmărirea sistemului centrului de greutate a învederat analogii între diferite elemente geometrice în ce priveşte rolul lor: elipsa lui *Steiner*, cercul circumscris, punctele reciproce, punctele inverse, sunt în perfect paralelism, primele conţinute de sistemul centrului de greutate, celelalte în sistemul ortocentrului.

V. *Idei generale pentru geometria triunghiului.*

Voi concentra ideile ce au străbătut părţile precedente, pregătite de aceste părţi; iar pentru început reliefez următoarea observare:

Sunt în geometria triunghiului legături între elemente, între proprietăţi, între elemente şi proprietăţi: "legături primitive" stabilite prin definiţii şi „legături secundare", urmări ale definiţiilor, creiate odată cu definirea şi desvăluite prin demonstraţii.

Această observare nu este de natură inductivă; pentru „Geometria triunghiului" ea are caracter de principiu impus de chiar caracterul ei: „legătura cu un triunghiu"; un element, absolut neînlănţuit cel puţin unui alt element sau unei alte proprietăţi a geometriei triunghiului, îşi împleteşte izolarea cu imposibilitatea de a fi legat unui triunghiu. Se fixează aşa dar principiul:

„Elementele şi proprietăţile geometriei triunghiului sunt în continuare".

Ca urmare, de un element ales se pot lega „toate" elementele şi proprietăţile geometriei triunghiului, într'o succesiune convenabilă, adică proprietăţile sau elementele se leagă de elementul iniţial prin intermediul altor proprietăţi sau elemente, deja legate.

Alegând ca element iniţial ortocentrul triunghiului de referinţă, se obţine totalitatea elementelor şi proprietăţilor posibile de obţinut fără intermediul proecţiei, apoi continuitatea se prelungeşte sub altă formă, prin proecţie.

Proecţia transformă ortocentrul într'un punct oarecare M al triunghiului proecţie, iar elementele şi proprietăţile proective în elemente şi proprietăţi având aceiaşi distribuţie în jurul punctului M, în ce priveşte deducerea şi rolul lor, pe care anterior efectuării proecţiei o aveau faţă de ortocentru.

Un triunghiu T poate fi privit drept proecţia cilindrică a unei infinităţi de triunghiuri şi orice punct M din planul său se poate considera proecţia unuia dintre ortocentrele infinităţii de triunghiuri.

Sau încă, se poate proecta pe un plan oarecare P, triunghiul T şi apoi proecta planul P pe planul T, sub alt unghiu.

După dubla proecţie cilindrică, s'a obţinut în planul T un triunghiu T_1, ortocentrul triunghiului T generează un punct M, iar proprietăţile şi elementele proective ale triunghiului T distribuite în jurul ortocentrului fără ajutorul proecţiei, generează proprietăţi şi elemente analog distribuite în jurul punctului M. Şi astfel pentru orice punct.

Deci continuarea există, cu o nuanţă — proecţia — dar există.

Şi voi mai conchide că într'un triunghiu există simultan elemente şi proprietăţi orientate în jurul ortocentrului şi elemente, proprietăţi analog orientate în jurul oricărui punct M.

* * *

Proecţia cilindrică dă continuităţii prezentată, amploarea, dar şi particularităţi. Anume, continuitatea nu este uniformă în esenţialul ei.

Forma sub care se prezintă până la aplicarea proecţiei este bazată atât pe „înlănţuire“, cât şi pe „situarea perfectă“ a unui element în raport cu acele ce l-au precedat prin intermediul definiţii sau deducţii.

Aplicând o proecţie sau un şir de proecţii, se păstrează „înlănţuirea“, dar se fixează arbitrar un prim element în triunghiul proecţie, în jurul cărora se orânduesc de loc arbitrar, ci „situate perfect“ proecţiile celorlalte elemente şi proprietăţi.

Inlănţuirea şi situarea perfectă se păstrează prin proecţie, evident, între proecţiile elementelor proective. Revin la spusele precedente.

Proectând ortocentrul împreună cu elementele legate prin definiţii sau deducţii de el, am arătat că se obţine un punct M şi un roiu de elemente analog înlănţuite lui.

Dar M poate fi oarecare, nu-l situează nici o definiţie, nici o deducţie nu-l precizează; există doar o corespondenţă, mijlocită de proecţie, între M şi ortocentru, sau procedând mai larg, între M şi M′.

Se desprinde aşa dar neuniformitatea continuităţii, fără a i se contrazice existenţa. Şi apoi, concluziile:

Cum într'un triunghiu există simultan elemente şi proprietăţi analog orientate în jurul oricărui punct M şi cum legătura între un grup M şi un grup M′ se stabileşte prin corespondenţa arbitrară între M şi M′, urmează propoziţia.

„Elementele grupate în jurul unui punct M *formează împreună cu el un tot distinct pe care-l numesc „sistem“, sistemul punctului* M, *de oarece* M *îl generează prin definiţii şi deducţii“.*

Evident cele spuse se puteau urmări pornind nu dela ortocentru, ci dela cercul circumscris triunghiului de referinţă cum am remarcat într'un alt capitol.

Constantă rămâne concluzia:

„Elementele şi proprietăţile geometriei triunghiului sunt grupate în „sisteme“ ce se pot desfăşura analog din elemente care se corespund“.

Justific însă alegerea punctului M — corespondent ortocentrului — ca generator al sistemului în care e cuprins, printr'o strict subiectivă perspectivă geometrică.

In fine, concluzia esenţială se degajă limpede. De oarece un element geometric sau o proprietate, aparţine unui sistem, socotirea numai a triunghiului de referinţă, ca unic element de referinţă e insuficientă; trebue să se adauge triunghiului fundamental cu valoare egală de element fundamental— corespondentul ortocentrului, punctul M. Astfel se impune ideia ce a prezidat „Extinderile în geometria triunghiului“: „prezenţa a două elemente de referinţă în geometria triunghiului“.

* * *

Extinderea unui element dintr'un sistem (A B C, M) la un sistem (A B C, M′) se obţine astfel cum expunerile au precizat, prin proecţia cilindrică. Extinderea priveşte deci elementele proective ale unui sistem, cele neproective fiind proprii acelui sistem. Se evidenţează astfel rolul de metodă al proecţiei; acelaşi rol în geometrie pe care inducţia completă îl împlineşte în aritmetică.

Accentuez acest paralelism, fără a-l prezenta altfel decât prin folosirea lui în cele ce au precedat.

Şi invoc tot capitolele precedente, acum, când voi depăşi cadrul ce le-a cuprins.

Continuitatea geometriei triunghiului îşi cuprinde întreg domeniul prin introducerea proecţiei conice.

Ori, proectând conic, aceiaşi observare va fi de făcut: „Corespondenţa arbitrară între elemente iniţiale“. Proecţia conică însă evidenţiază un al treilea element iniţial, voalat de proecţia cilindrică, prin constanţa situării lui.

Noul element iniţial este o dreaptă Δ, corespunzând dreptei dela infinit a grupului de proprietăţi şi elemente desfăşurat din ortocentru.

Inlătur amănuntele motivării, spunând că un triunghiu A B C şi un punct M sunt proecţia cilindrică a unui triunghiu $A_1 B_1 C_1$ şi a ortocentrului său, dar sunt şi proecţia conică a o infinitate de triunghiuri $A_n B_n C_n$ şi a ortocentrelor lor.

Fiecare triunghiu $A_n B_n C_n$ conduce însă, prin proecţie, la un grup de proprietăţi şi elemente, legat de punctul M şi de triunghiul A B C. Acelea ce disting grupele „sistemele“ provenind din infinitatea de triunghiuri $A_n B_n C_n$ sunt proecţiile dreptelor dela infinit din planele acelor triunghiuri.

Ca şi în cazul punctului M, arbitrarul aduce fundamentalul şi astfel observarea evidenţiată conduce la principiul esenţial în geometria triunghiului:

„Proprietățile și elementele geometriei triunghiului se grupează în sisteme având ca fundamentale triunghiul A B C, *punctul* M *corespondent ai ortocentrului și dreapta* Δ *corespondentă dreptei dela infinit, corespondența fiind stabilită de proecție“.*

In pregătirea pătrunderii acestui rezultat final, adică în părțile precedente, sistemul M a avut, lângă triunghiul fundamental și punctul fundamental, incognito dreapta dela infinit: iar sistemul mult folosit, obișnuit, se referă triunghiului A B C, ortocentrului și dreptei dela infinit.

Așa dar geometria triunghiului nu este numai a triunghiului; cu aceiași valoare apar în cuprisul ei un punct și o dreaptă. Orice proprietate sau element se orientează după aceste trei elemente inițiale, în chip fatal.

Și dacă reiau o precizare: „Ca element inițial poate fi luat orice element al sistemului“; dacă observ că triunghiul și punctele absolute ale sistemului definesc precis triunghiul, dreapta dela infinit și, prin intermediul conicei circumscrise, punctul M, deci fundamentele sistemului; dacă voi îndemna repetarea observației în cazul (A B C, M, Δ) voi conchide:

„Elementele și proprietățile geometriei triunghiului se leagă de precizarea a cinci puncte: A, B, C, I, J, *fundamente ale fiecărui sistem, fundamente ale însăși geometriei triunghiului, care din acest punct de vedere s'ar putea numi a pentagonului“.*

Și încheiu aci capitolele *„Extinderilor în geometria triunghiului“*, subliniind că intenția finală a fost acest ultim capitol.

NOTE MATEMATICE

27. *Câteva identități trigonometrice.*

Fiind dată o fracțiune ireductibilă, de forma:

$$(1)\qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

în care $f(x)$ și $\varphi(x)$ sunt două polinoame, gradul numărătorului fiind mai mic ca al numitorului, se demonstrează că, în cazul când numitorul $\varphi(x)$ admite rădăcinele simple:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots a_n,$$

fracțiunea (1) se poate pune sub forma:

$$(2)\qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

în care $A_1, A_2, \ldots A_n$ sunt niște constante a căror valori sunt respectiv:

$$(3)\qquad A_1 = \frac{f(a_1)}{\varphi'(a_1)};\quad A_2 = \frac{f(a_2)}{\varphi'(a_2)};\ \ldots\ A_n = \frac{f(a_n)}{\varphi'(a_n)}.$$

In ipoteza că, gradul lui $f(x)$ este mai mic cu cel puțin două unități ca a lui $\varphi(x)$ relațiunea (2) devine, succesiv:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{x-a_i}$$

$$\therefore\quad \frac{x f(x)}{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x}{x-a_i} A_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x}{x-a_i} \cdot \frac{f(a_i)}{\varphi'(a_i)}.$$

Primul membru al acestei identități tinde la zero când x ia valoarea infinit.

Deci obținem identitatea:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(a_i)}{\varphi'(a_i)} = 0,$$

identitate care poartă numele lui *Euler*.

* * *

Cu ajutorul acestei identități a lui *Euler*, putem stabili o serie de alte identități interesante.

1-a. Fie:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{(x-\cos 2a)(x-\cos 2b)(x-\cos 2c)}.$$

In virtutea identității lui *Euler*, putem scrie:

$$\frac{1}{(\cos 2a-\cos 2b)(\cos 2a-\cos 2c)} +$$

$$\frac{1}{(\cos 2b-\cos 2a)(\cos 2b-\cos 2c)} +$$

$$\frac{1}{(\cos 2c-\cos 2a)(\cos 2c-\cos 2b)} = 0.$$

Ori:

$$\cos 2a - \cos 2b = 2\sin(a+b)\sin(b-a),$$

deci avem mai departe:

$$\sum \frac{f(a_i)}{\varphi'(a_i)} =$$

$$\sum \frac{1}{4\sin(a+b)\sin(a+c)\sin(b-a)\sin(c-a)} = 0,$$

aducând la acelaşi numitor, căpătăm că:

$$\sin(b+c)\sin(b-c)+\sin(c+a)\sin(c-a)$$
$$+\sin(a+b)\sin(a-b)=0,$$

(Trigonometria de Haret, pag. 66).

2-a. Fie:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{(x-\sin 2a)(x-\sin 2b)(x-\sin 2c)},$$

avem:

$$\sum\frac{1}{(\sin 2a-\sin 2b)(\sin 2a-\sin 2c)},$$

dar:

$$\sin 2a-\sin 2b=2\sin(a-b)\cos(a+b),$$

deci, înlocuind căpătăm:

$$\sum\frac{1}{4\sin(a-b)\sin(a-c)\cos(a+b)\cos(a+c)}=0.$$

Aducem la acelaşi numitor şi facem reducerile, obţinem:

$$\cos(b+c)\sin(b-c)+\cos(c+a)\sin(c-a)+$$
$$\cos(a+b)\sin(a-b)=0.$$

(Trigonometria de Haret, pag. 66).

3-a. Fie:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{(x-\operatorname{tg}a)(x-\operatorname{tg}b)(x-\operatorname{tg}c)},$$

după identitatea lui *Euler*, avem:

$$\sum\frac{1}{(\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b)(\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}c)}=0,$$

însă:

$$\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b},$$

urmează că:

$$\sum\frac{\cos a}{\sin(a-b)\sin(a-c)}=0,$$

sau încă:

$$\cos a\sin(b-c)+\cos b\sin(c-a)+\cos c\sin(a-b)=0$$

(Culegere de probleme, pag. 381).

4-a. Fie:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{1}{(x-\operatorname{cotg}a)(x-\operatorname{cotg}b)(x-\operatorname{cotg}c)}=0,$$

urmând ca mai sus. avem succesiv:

$$\sum\frac{1}{(\operatorname{cotg}a-\operatorname{cotg}b)(\operatorname{cotg}a-\operatorname{cotg}c)}=0$$

$$\operatorname{cotg}a-\operatorname{cotg}b=\frac{\sin(b-a)}{\sin a\sin b}$$

$$\therefore\ \sum\frac{\sin a}{\sin(b-a)\sin(c-a)}=0,$$

în cele din urmă:

$$\sin a\sin(b-c)+\sin b\sin(c-a)+\sin c\sin(a-b)=0$$

(Cnlegere de probleme pag. 381).

LT. I. GEORGESCU.-VAL
Şc. Polit. Timişoara

28. *Câteva proprietăţi ale parabolei.*

Fie parabola P, cu vârful A, focarul F şi directoarea D. O coardă ce trece prin focarul F taie parabola în M şi M′ şi fie O, polul coardei M F M′, faţă de parabola P.

Să proectăm focarul F în β şi γ pe normalele în M şi M′ la parabolă.

1°. *Dreapta $\beta\gamma$ taie coarda* M F M′, *pe tangenta la vârf.* In adevăr, fie m şi m' punctele unde tangentele în M şi M′ la parabolă, adică O M şi O M′, taie tangenta la vârf.

Dreptele βm şi $\gamma m'$ sunt paralele, după cum am demonstrat în „G. M.“ Asupra construcţiei centrelor de curbură ale conicelor“.

Triunghiurile m M β şi m' F γ sunt homotetice. Deci dreptele $\beta\gamma$, M M′ şi tangenta la vârf sunt concurente.

2°. Să transformăm prin polare reciproce proprietatea 1°. Polul dreptei M F M′ este O, de pe directoarea D. Polul tangentei la vârf este A.

Fie m_1 şi m_1' punctele în care dreptele F m şi F m' taie directoarea D, iar m_2 şi m_2' punctele în care βm şi $\gamma m'$, taie parabola P. Polul dreptei $\beta\gamma$ este la intersecţia polarelor lui β şi γ. Punctul β se află pe βm, al cărei pol este la infinit pe tangenta în m_2 la parabolă. Se mai află şi pe F β, al cărui pol este m_1.

Polara punctului β este deci paralela din m_1 la tangenta în m_2 la parabolă. Idem, polara lui γ este paralela din m_1' la tangenta în m_2' la P.

Punctele A, O *şi* δ *sunt deci colineare,*

3°. Fie m_3 şi m'_3 respectiv intersecţiile (A M, F m); (A M′, F m'). *Dreapta* $m_3 m'_3$ *trece prin conjugatul punctului* O, *faţă de parabolă, luat pe directoare.*

In adevăr, triunghiurile M A M′ şi m_1 F m'_1 sunt homologice, pentru că au vârfurile pe 3 drepte paralele.

Intersecţiile (A M, F m); (A M′, F m'); ($m_1 m'_1$, M M′) sunt deci colineare, adică, $m_3 m'_3$ trece prin intersecţia directoarei cu M M′, care este O′.

M M′ este însă polara lui O faţă de parabolă. Deci punctul O′ *este conjugatul lui* O, *faţă de parabolă.*

Dreapta $m_3 m'_3$ *trece prin* O′ *conjugatul lui* O.

4°. Dacă transformăm prin polare reciproce figura, obţinem:

Tangentele în punctele unde $m_3 m'_3$ *taie parabola, se intersectează pe dreapta* O F.

In adevăr polul directoarei este focarul, polul dreptei M F M′ este O şi al dreptei $m_3 m'_3$, locul de intersecţie al tangentelor, în punctele unde $m_3 m'_3$ taie parabola.

5°. Se observ ceva asupra asupra construcţiei centrului de curbure λ, al parabolei.

In „G. M.“, vol. XXXIII, pag. 448, am dat următoarea demonstraţie, construcţiei centrului de curbură la parabolă:

Dacă v *este simetricul lui* m *faţă de* β, *perpendiculara în* v *pe* F v *taie normala în* M *la parabolă, în centrul de curbură* λ.

Să descriu cercul ce trece prin F, β, v şi λ şi care va tăia pe M F în u.

Patrulaterul F β v u se vede uşor, că este un trapez isoscel, de oarece unghiurile F M β şi F m β sunt egale.

Avem deci:

$$\overline{\beta v} = \overline{m \beta} = \text{F } u.$$

Insă $\overline{\text{M F}} = \overline{m \beta}$. Deci avem:

$$\overline{\text{M F}} = \overline{\text{F } u}.$$

Am regăsit astfel construcţia obişnuită a centrului de curbură al parabolei:

Simetricul punctului M *faţă de focar este* u. *Perpendiculara în* u *pe* M F *taie normala în* M *la parabolă, în centrul de curbură* λ.

LOC. MIHAIL I. FOCSENEANU.
Şc. militară de Artilerie

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, an. XXXV, No. 5, Ianuarie 1930. Sărbătorirea d-lui profesor *David Emmanuel. Vasile Cristescu* (activitatea lui ştiinţifică), de *I. Ionescu.* Skiagrafometria, de Ing. *I. I. Chiţulescu.*

2. *Buletinul societăţii de ştiinţe din Cluj*, tomul V, fascicolul 1, Ianuarie 1930. Sur une formule de *M. Pompeiu*, par *A. Angelescu.* Une nouvelle métohode macro et microchimique pour le dosage rapide du bismuth, par *G. Spacu* et *G. Suciu.*

Recherches sur une équation intégrale liniaire, par *R. L. Bădescu.* Sur le théorème de *Sturm*, par M. *Niculescu.* Etudes sur les cuprothiosulfates complexes d'amonium, de potasium et de sodium, par *G. Spacu* et *I. G. Murgulescu.* Observations et nouvelles propositions relatives aux régles de la nomenclature officielle pour les composés anorganiques, par *A. Ostrogovich.*

3. *Revista de Ciencias*, ano XXXII, Julio e Setiembre 1929, No. 7 à 9. Necrologia. Conferentia del prof. Dr. *Henri Laugier.* Capparidaceae cuzcoense Dr. *F. L. Herrero.* Cronica universitaria. Suplemento.

4. Sur le probléme de *Malffati.* Le pendule de *Foucault* et autres questions d'analye et de physique, par *Louis Gérard.* (Paris, Librairie Vuibert, 1929, 8 fr.)

5. *Dragutin Ciupe* (director). Probleme rezolvate din aritmetică şi Algebră. (Metoda cea mai lesnicioasă pentru a învăţa în scurt timp „Regula de trei simplă şi compusă“, fără profesor).

Preţul 20 lei, plus porto; a se adresa autorului: Str. Ungurească No. 30, Bistriţa Jud. Năsăud.

PROBLEME REZOLVATE

839. — *Se dau ecuaţiile:*

$$x^2 + p x + q = 0$$

$$y^2 - (p^2 - 2q) y + q^2 = 0$$

Să se arate că rădăcinele primei ecuaţii se pot obţine extrăgând rădăcina patrată din rădăcinele ecuaţiei a doua.

V. ALACI

Prima soluţie. Conform enunţului:

$$x = \sqrt{y},$$

deci:

$$x^2 = y.$$

Inlocuind aceste valori în prima ecuaţie, avem:

$$y + p\sqrt{y} + q = 0$$

$$\therefore \quad y + q = -p\sqrt{y}$$

Ridicând la patrat şi ordonând în raport cu y, avem:

$$y^2 - (p^2 - 2q)y + q^2 = 0.$$

Aceasta este tocmai ecuaţia în y din enunţ.

Soluţii analoage date de d-nii: *Alexandrescu N.*, *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, Bucureşti), *Ioaniţesu D-tru* (lic. Milit, Iaşi), *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit., Iaşi), *Petrescu Traian* (lic. Milit., Iaşi) şi *Russu Liviu* (Şc. Polit., Timişoara).

Soluţia 2-a. Din enunţ rezultă că rădăcinele y_1, y_2 a ecuaţiei în y, sunt egale cu patratele rădăcinelor x_1, x_2 a ecuaţiei în x, adică:

$$y_1 = x_1^2, \qquad y_2 = x_2^2.$$

De aci deducem, ţinând seamă de relaţiile dintre rădăcinele şi coeficienţii ecuaţiei în x:

$$y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$$

$$y_1 y_2 = x_1^2 x_2^2 = q^2.$$

Ecuaţia cu rădăcinele y_1 şi y_2, este astfel:

$$y^2 - (p^2 - 2q)y + q^2 = 0,$$

care coincide cu cea din enunţ.

Aşa dar rădăcinele ecuaţiei în x, se pot obţine extrăgând rădăcinele ecuaţiei în y.

Soluţii analoage date de d-nii: *Antonescu Aurel* (bacalaureat, Focşani), *Boerescu P. George* (lic. Oltenita), *Brotmann I.* (bacalaureat, Bucureşti), *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *Crivăţ I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, Bucureşti), *Ioaniţescu D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Marineanu Traian* (student, Bucureşti), *Murăroiu I.* (bacalaureat, Braşov), *Patron M.* (lic. Milit., Iaşi), *Popovici Gh. Valentin* (Câmpina), *Schiopulescu M. Ionel* (lic. Caracal) *Ştefănescu Anibal* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Vâlceanu N. Justin* (Şc. Polit., Timişoara).

Soluţia 3-a. Rădăcinele primei ecuaţii, sunt:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

care se mai pot scri:

$$(1) \qquad x = \sqrt{\left(\frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{p^2 - 2q \pm p\sqrt{p^2 - 4q}}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{p^2 - 2q \pm \sqrt{(p^2 - 2q)^3 - 4q^2}}{2}},$$

Oricum rădăcinele ecuaţiei în y, sunt:

$$y = \frac{p^2 - 2q \pm \sqrt{(p^2 - 2q)^2 - 4q^2}}{2},$$

rezultă privind relaţia (1):

$$x = \sqrt{y},$$

adică rădăcinele ecuaţiei în x se obţine extrăgând rădăcina patrată a rădăcinelor ecuaţiei în y.

Soluţii analoage date de d-nii: *Alexandrescu N.*, *Băcanu Ioan* (Sbt. Sibiu), *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Chirilă V. Gheorghe* (lic. Milit., Iaşi), *Cuciureanu Ştefan* (lic. Milit., Iaşi), *David I. Lucian* (Şc. Polit, Timişoara), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (Şc. Polit., Bucureşti), *Dimitriu At. Ioan* (bacalaureat, Gataţi), *Florea I. Codreş* (lic. Milit., Craiova), *Ghişoiu I. Petre* (bacalaureat, Bucureşti), *Ioaniţescu Gh. D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Gh. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenita), *Lupescu C-tin* (lic. Roman), *Mereuţă Emil* (lic. P.-Neamţ), *Negrea A. Mircea Leonte* (student, Bucureşti), *Paliţa C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Patron M.* (lic. Milit., Iaşi), *Petrică I. Ioan* (Şc. de Cond., Cluj), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenita), *Popescu O. Ioan* (absolvent, Calafat), *Purdilă Anton* (lic. Braşov), *Scarlat D.* (Şc. Navală, Constanţa), *Russu Liviu* (Şc. Polit., Timişoara), *Teodorescu Stavrache* (lic. Milit., Iaşi), *Tutoveanu Valeriu* (student) şi *Vâlceanu N. Justin* (Şc. Polit., Timişoara).

Au mai trimes soluţii, d-nii: *Motoc D. M.* (lic. Oltenita) şi *Nichifirescu Gh.* (student).

841. — *Intre elementele unui triunghiu oarecare, avem relaţiile:*

$$\sum \frac{a^2 - b^2}{\sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B}{2}} = 16R(R + r)$$

$$\sum \frac{a^2 - b^2}{\cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2}} = -16R(R + r).$$

CEZAR COSNITA

Observăm uşor că relaţia 2-a se reduce la prima. In adevăr, putem scri:

$$\sum \frac{a^2 - b^2}{\cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2}} =$$

$$\sum \frac{a^2 - b^2}{1 - \sin^2\frac{A}{2} - 1 + \sin^2\frac{B}{2}} = -16R(R + r),$$

deci:

$$\sum \frac{a^2-b^2}{\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}} = 16R(R+r).$$

Rămâne să stabilim prima relație. Pentru aceasta folosim relațiile cunoscute:

$$a = 2R\sin A,$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2},$$

și analoagele lor, și putem scrie:

$$\frac{a^2-b^2}{\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}} = \frac{8R^2(\sin^2 A-\sin^2 B)}{\cos B-\cos A} =$$

$$\frac{8R^2(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)}{\cos B-\cos A} =$$

$$\frac{16R^2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}} =$$

$$-16R^2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = 8R^2(\cos A+\cos B).$$

De aci rezultă:

$$(1)\quad \sum \frac{a^2-b^2}{\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}} =$$

$$16R^2(\cos A+\cos B+\cos C).$$

Dar cum este cunoscută relația:

$$\cos A+\cos B+\cos C = \frac{R+r}{R},$$

(F. G. M., pag. 215), relația (1) devine:

$$\sum \frac{a^2-b^2}{\sin^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{B}{2}} = 16R(R+r),$$

tocmai relația cerută.

Soluții date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic, Milit., Iași), *Brotmann I.* (bacalaureat, București), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Florea Codreș* (lic. Milit., Craiova), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Marineanu Traian* (student, București), *Negrea A. Leonte Mircea* (student), *Popescu Gh. Gheorghe* (lic. Milit., Iași), *Scarlat D.* (Șc. Navală, Constanța) și *Teadorescu Stavrache* (lic. Milit., Iași).

845. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=9 \\ xy(x^3z+y^3z+z^4)=0. \end{cases}$$

ION CURCHI

Ecuația a 3-a se poate scrie:

$$xyz(x^3+y^3+z^3)=0,$$

și ținând seamă de ecuația 2-a, deducem:

$$xyz=0.$$

Unul din factori trebue să fie zero, fie:

$$x=0,$$

atunci primele două ecuații a sistemului devin:

$$(1)\quad \begin{cases} y+z=3 \\ y^3+z^3=9. \end{cases}$$

Cum:

$$y^3+z^3=(y+z)^3-3yz(y+z)=9,$$

rezultă, ținând seamă de prima ecuație din (1):

$$27-9yz=9$$

$$\therefore\quad yz=2.$$

Astfel sistemul (1) este echivalent, cu sistemul:

$$\begin{cases} y+z=3 \\ yz=2. \end{cases}$$

Având suma și produsul lui y și z, putem forma ecuația:

$$(2)\qquad t^2-3t+2=0,$$

ale cărei rădăcini sunt tocmai y și z.

Din (2) deducem ușor:

$$t_1=y=1,\quad t_2=z=2,\quad \text{sau:}\quad y=2,\ z=1.$$

Sistemele de soluții a sistemului dat, ținând seamă că x, y, z intră simetric, pot fi cuprinse în următorul tablou:

x	0	0	1	1	2	2
y	1	2	0	2	0	1
z	2	1	2	0	1	0

Soluții date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit., Iași), *Băcanu Ioan* (Sublocot., Sibiu), *Brotmann I.* (bacalaureat, București), *Cincilian Agop* (Câmpina), *Chirilă V. Gheorghe* (lic. Milit., Iași), *Cristal Gh.* (Șc. de Arte și Meserii, Iași), *Crivăț I. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Cuciureanu Șt.* (lic. Milit., Iași), *Dănciulescu Gr. Virgiliu* (student, București), *Donciu Neculai* (lic. Bârlad), *Drinceanu A. Barbu* (absolvent), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Grinberg Meer* (lic. Tighina), *Hamerak Carol* (Caransebeș), *Ioanițescu Ch. D-tru* (lic. Milit., Iași), *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit., Iași), *Ionescu P. Haralamb* (lic. Oltenița), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Mara Ștefan*, *Marineanu Traian* (student, București), *Mereuță Emil* (lic. P.-Neamț), *Mihaileanu Nicolae* (lic. Constanța), *Negrea A. Mircea-Leonte* (student), *Paliță C.* (lic. Milit., Iași), *Patron M.* (lic. Milit., Iași), *Petrescu Traian*, *Petrică I. Ioan* (Șc. de Conductori, Cluj), *Popa Gh. Ioan* (lic. Oltenița), *Popescu Gh. Gheorghe* (lic. Milit., Iași), *Purdilă Anton* (lic. Brașov), *Russu Liviu* (Șc. Polit, Timișoara), *Scarlat D.* (Șc. Navală Constanța) *Simionnscu Gh.* (lic. Milit., Cernăuți), *Teodorescu Șt.* (lic. Milit, Iași) și *Zoiade Grigore* (Șc. Polit., Timișoara).

Au mai trimes soluții, d-nii: *Firoiu Ioan* (lic. Arad) și *Lucian I. David* (Șc. Polit. Timișoara).

848. — *Intr'un triunghiu dreptunghiu avem următoarea relațiune:*

$$\frac{\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{2a(b-c)}{(a+b)(a+c)}.$$

GH. NICHIFORESCU.

Observăm că:

$$\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}=\frac{\cos C-\cos B}{2},$$

$$\cos^2\frac{B}{2}=\frac{1+\cos B}{2},\quad \cos^2\frac{C}{2}=\frac{1+\cos C}{2}.$$

De aci deducem:

$$(1)\quad \frac{\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{2(\cos C-\cos B)}{(1+\cos B)(1+\cos C)}.$$

Pe de alta, într'un triunghiu ABC, știm că avem:

$$\cos B=\frac{c}{a},\quad \cos C=\frac{b}{a},$$

astfel că (1) devine:

$$\frac{\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{2\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{a}\right)}{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)}=$$

$$=\frac{2a(b-c)}{(a+b)(a+c)},$$

adică tocmai relația cerută.

Observare. Analog putem stabili și relațiunea:

$$\frac{\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}=\frac{2a(b-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

Soluții date de d-nii: *Alexandrescu N.* (lic. Milit., Iași), *Barbu A. Drinceaun* (absolvent), *Băcanu Ioan* (S-lt. Sibiu), *Bâcicov P. Boris* (bacalaureat, Tighina), *Bâcicov P. Victor* (lic. Tighina), *Brotmann I.* (bacalaureat, București), *Cincitian Agop* (Câmpina), *Coșniță Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Cristal Gh.* Șc. sup. de Arte și Meserii, Iași), *Crivăț P. Vladimir* (lic. Matei-Basarab, București), *Florea I. Codreș* (lic. Milit., Craiova), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Lupescu Gh. C-tin* (lic. Roman), *Marineanu Traian* (student, București), *Mereuță Emil* (lic. P.-Neamț), *Negrea A. Mircea* (student), *Patron M.* (lic. Milit., Iași), *Popescu Gh. Gheorghe* (lic. Milit., Iași) și *Scarlat D.* (Șc. Navală, Constanța).

D-l *Coșniță Cezar* (bacalaureat. Bârlad) a mai stabilit relațiile:

$$\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{(a-b)(a-c)}{(a+b)(a+c)}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c},$$

și altele.

849. — *Să se arate că expresiunea:*

$$754^{2n}\times 9^n-7396^n\times 24^{2n},$$

se divide cu 2163.

TR. MARINEANU

Soluția I. Fie E valoarea expresiunei date. Avem:

$$E=754^{2n}\times 3^{2n}-86^{2n}\times 24^{2n}$$

$$\therefore\quad E=2262^{2n}-2064^{2n}=$$

$$(2163+99)^{2n}-(2163-99)^{2n}$$

$$\therefore\quad E=\text{mult. } 2163+99^{2n}-99^{2n}=\text{mult. } 2163.$$

Au dat această soluție d-nii: Sublocot. *I. Băcanu* (Sibiu), *Crivăț I. C.* (lic. Matei-Basarab, București), *Ghișoiu I. Petre* (bacalaureat, București), *Grecu M. C.*, *Ionescu P. H.* (lic. Oltenița), *David I. L.* (Șc. Polit., Timișoara), *Mihăileanu N.* (lic. Constanța) și *Popa Gh. I.* (lic, Oltenița).

Soluția II. Inlocuind pe 754^2 prin 568516 și pe 24^2 prin 9×64, avem:

$$E=(568516\times 9)^n-(7396\times 576)^n=$$

$$9^n[568516^n-473344^n].$$

Apoi:

$$2163 = 3 \times 721.$$

Dar avem:

$$568516 = 788 \times 721 + 368$$

$$473344 = 656 \times 721 + 368$$

$$E = 9^n \text{ mult. } 721 = 3^n \text{ mult. } 2163.$$

A dat această soluție d-l *Șerban-Ulmeni* (lic. Oltenița).

Soluția III. Avem:

$$2163 = 3 \times 7 \times 103$$

$$E = 9^n [754^{2n} - 7396 \times 8^{2n}]. \quad (1)$$

Se vede imediat că E se divide cu 3. Se caută resturile diviziunei numerelor 754^{2n}, 7396×8^{2n} succesiv prin 7 și 103 și se găsește că E se divide și prin 7 și prin 103. Numerile 3, 7, 103 fiind prime, E se va divide și prin produsul lor, adică prin 2163.

Au întrebuințat această cale d-nii: *Alexandrescu N.*, *Chirilă Gh.* (lic. Milit., Iași), *Dăscălescu Șt. H.*, *Dimitriu A. I.* (Șc. Polit., București), *Ioanițescu Gh. D.*, *Ionescu C. Iulian* (lic. Milit., Iași), *Motoc I. M.* (lic Oltenița), *Negoescu A. I.*, *Patron M.*, *Popescu Gh.* (lic. Milit., Iași), *Scarlat D.* (Șc. Navală, Constanța) și *Teodorescu Șt.* (lic. Milit., Iași).

Observațiuni 1°. D-l *Ghișoiu I. P.* punând pe E sub forma (1) observă că expresia dată se divide prin $9 \times 721 = 6489$.

2°. Un corespondent enunță că 2163 fiind multiplu de 3 e de ajnns de a arăta că E se divide cu 3. Numele lui nu se găsește printre cei citați până aici, la soluția acestei probleme.

PROBLEME PROPUSE

879. — Care sunt valorile întregi ale lui N pentru care restul împărțirei lui 5N prin numărul întreg $2n+1$ este mai mare decât n?

COL. GH. BUICLIU

880. — Să se afle cel mai mic număr de patru cifre, care se poate descompune într'un produs de trei factori primi, a căror sumă este 200.

V. ALACI

881. — Să se arate că în oricare triunghiu, avem:

$$\frac{3}{4} p < m < p,$$

unde m este suma medianelor, iar p perimetrul triunghiului dat.

ION MARGINEANU

882. — Proecțiile unui punct M al unui cerc, pe laturile unui dreptunghiu înscris în acel cerc, sunt astfel că una din ele este ortocentrul triunghiului format de celelalte trei proecții.

LT. MIHAIL I. FOCSENEANU

883. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = \dfrac{17}{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{161}{4} \\ z(xy + x + y) = 22. \end{cases}$$

TRAIAN MARINEANU

884. — Să se rezolve ecuația:

$$(x + i\sqrt{x^2 - a^2})^n - (x - i\sqrt{x^2 - a^2})^n = 0, \quad (i = \sqrt{-1})$$

CEZAR COSNITA.

885. — Să se afle limita expresiunei:

$$E = \frac{\sqrt[m]{(a \sin x)^p} - \sqrt[m]{(a - b\cos x)^p}}{\sqrt[n]{(a - b\cos x)^q} - \sqrt[n]{(a \sin x)^q}},$$

pentru $x = \dfrac{\pi}{2}$.

JUSTIN N. VALCEANU

886. — Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} = 2.$$

NECULAI TH. DOICIU

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE

C. Ionescu-Bujor Extinderi în geometria triunghiului 3
Cezar Coşniţă Calculul elementelor unui triunghiu în funcţie de înălţimi 13
C. Ionescu-Bujor Extinderi în geometria triunghiului 25
V. Vâlcovici Concursul Revistei Matematice din Timişoara 29
T. Popoviciu Asupra unei probleme de algebră 37
* * * Traian Lalescu 49
* * * Cum s'a înfiinţat Revista Matematică din Timişoara . . 50
I. Crăciunescu O demonstraţie elementară a teoremei lui d'Alembert . . 51
Col. Gh. Buicliu Probleme identice 61
P. Sergescu O aplicaţie a unei teoreme elementare de geometrie . . 74
Col. Gh. Buicliu Problema nucilor 74
Cezar Coşniţă Demonstraţii geometrice pentru câteva proprietăţi deduse pe cale de transformare . . . 85
H. P. Ionescu Inegalităţi între elementele unui triunghiu 97
V. Alaci Asupra unor clase de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice 109
V. Vâlcovici Mişcarea unui corp solid cu o axă fixă 123
C. Ionescu-Bujor Extinderi în geometria triunghului 135

II. NOTE MATEMATICE

1. **Râmniceanu I. C.** Asupra problemei 777 din R. M. T. 5
2. **Nic. O. Zaharia** Generalizarea problemei 710 din R. M. T. 5
3. **Cezar Coşniţă** Câteva relaţiuni remarcabile într'un triunghiu 7
4. **Justin Vâlceanu** Asupra unor ecuaţii de gradul al 2-lea 15
5. **Justin Vâlceanu** Generalizarea problemei 448 . 16
6. **H. P. Ionescu** Generalizarea problemei 747 . 16
7. **I. Murăroiu** Generalizarea notei 6 din R. M. *T.*, an. VIII 27
8. **Gh. I. Balaban** Asupra unei limite 28
9. **I. Murăroiu** Generalizarea problemei 750 . 29
10. **Gh şoiu I. P.** Asupra problemei 710 . . . 39
11. **Zagaican Ilie** Asupra problemei 728 din R. M. T. 40
12. **Just. N. Vâlceanu** Generalizarea problemei 765 . 40
13. **T. Popoviciu** Asupra problemei 85 . . . 52
14. **Just. N. Vâlceanu** Soluţia geometrică a problemei 725 52
15. **I. Murăroiu** Asupra unei identităţi . . . 63
16. **Aurel Pârvu** Asupra triunghiurilor în care avem $2a^2=b^2+c^2$ 63
17. **I. Murăroiu** Identitatea lui Lagrange generalizată 76
18. **P. I. Ghişoiu** O generalizare 77
19. **Cezar Coşniţă** Asupra dreptei lui Euler . . 78
20. **I. Morăroiu** Câteva chestiuni de algebră . 89
21. **H. P. Ionescu** Asupra problemei 760 . . . 90
22. **T. Popoviciu** Asupra unei teoreme de aritmetică 99
23. **T. Popoviciu** O problemă asupra indicatorilor 101
24. **V. Alaci** Asupra compunerei a două forţe paralele 118
25. **T. P.** Asupra unei note matematice 128
26. **Tib. Popoviciu** Asupra unei probleme de aritmetică 128
27. **Lt. I. Georgescu V.** Câteva identităţi trigonometrice 138
28. **Lt. M. Focşeneanu** Câteva proprietăţi ale parabolei 139

III. BIBLIOGRAFII

Gazeta Matematică 7, 18, 29, 41, 54, 64, 78, 92, 102 . . . . . 118, 129, 140
Revista Universitară Matematică 18, 92
Bulletin scientifique de l'Ecole politechnique de Timişoara 29, 119
Angheluţa Theodor. Sur une classe nouvelle de noyaux pour une équation *Fredholm* 29
O. Onicescu. Calcul vectorial 54
Şerban A. Gheorghiu. Sur l'Equation de *Fredholm* . 54
Grigore C. Moisil. La mécanique analytique des systémes continus 54
Buletinul Asociaţiei Matematice a liceului C. Alimănişteanu, din Oltenita 54
Georges Bouligand. Compléments et exercices sur la Mécanique des solides 64
E. Laine. Premieres leçons de géometrie analytique et de géometrie vectorielle 64
E. Abason. Traian Lalescu 92
E. Abason. Sur les séries de puissances périodiques. 92
Rodolphe Raclis. Une formule sommatoire . . . 102
Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences 118
Buletinul societăţii de ştiinţe din Cluj . . . 118, 140
Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliqueés, de l'Ecole Polytechnique de Bucarest 119
V. Vâlcovici. Sur le genre des vecteurs electro-magnétiques 119
V. Vâlcovici. Asupra mişcărilor rotatorii în fluide . 119
V. Vâlcovici. Généralisation du théoréme de Koenig 119
E. Abason. Sur les séries de puissances périodiques 119
P. Sergescu. Sur les methodes des racines des équations algébriques 119
P. Sergescu. Sur les modules des zéros de l'équation du troisième degré 119
Radu Bădescu. Sur l'équation intégrale *d'Abel*, généralisée 119

Radu Bădescu. Sur une équation intégrale 119
Radu Lazăr Bădescu. Recherches sur une équation intégrale linéaire 129
Revista de Ciancias. 140
Louis Gérard. Sur le problème de Malfatti 140
Dr Ciupe Probleme rezolvate 140

IV. CHESTIUNI DE EXAMEN

Şcoala Politecnică din Timişoara. Examen de admitere în anul I 91, 101

V. PROBLEME REZOLVATE ŞI PROPUSE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul IX. Problemelor care nu au nimic scris în coloana 4) încă nu li s-a publicat soluţia.

1).	2).	3).	4).
42	94	I.	
50	110	„	
54	126	„	
69	142	„	
91	187	„	
98	187	„	
99	187	„	
100	187	„	
109	14	II.	
110	14	„	
114	30	„	
120	30	„	
124	30	„	
140	62	„	
141	62	„	
150	78	„	
154	94	„	
157	94	„	
161	94	„	
162	94	„	
163	94	„	
164	94	„	
165	94	„	
173	110	„	
174	110	„	
175	110	„	
176	126	„	
178	126	„	
184	126	„	
185	126	„	
186	142	„	
191	142	„	
194	142	„	
195	142	„	
198	158	„	
199	158	„	
206	174	„	
207	174	„	
208	174	II.	
212	174	„	
213	174	„	
214	174	„	
217	185	„	
230	14	III.	
235	30	„	
243	46	„	
244	46	„	
248	46	„	
253	62	„	
255	62	„	
259	62	„	
264	78	„	
268	78	„	
275	78	„	
289	126	„	
291	126	„	
296	126	„	
299	142	„	
310	174	„	
313	174	„	
315	174	„	
317	174	„	
319	185	„	
334	14	IV.	
335	14	„	
336	14	„	
343	30	„	
344	30	„	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	„	
390	126	IV.	
393	126	„	
401	158	„	
406	158	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V.	
440	30	„	
442	30	„	
444	30	„	
445	46	„	
450	46	„	
458	62	„	
460	62	„	
462	62	„	
464	78	„	78
473	94	„	64
474	94	„	65
475	94	„	66
478	94	„	
479	94	„	
485	110	„	
489	126	„	
502	142	„	67
507	159	„	
508	159	„	55
509	159	„	68
512	159	„	70
514	174	„	
516	174	„	
518	190	„	
519	190	„	
524	190	„	
526	14	VI.	79
527	14	„	
528	14	„	
531	14	„	
	122	IX.	
533	30	VI.	56
534	30	„	56
535	30	„	
537	30	„	
540	46	„	71
541	46	„	
542	46	„	
543	46	„	
544	46	„	
548	46	„	
549	62	„	81
550	62	„	
557	78	„	
558	78	VI.	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII.	
628	38		
	118	„	
634	54	„	
635	54	„	
639	54	„	
646	72	„	
649	86	„	
652	86	„	
653bis	102	„	
655	102	„	
656	102	„	
657	102	„	
658	102	„	
662	118	„	
667	134	„	
668	134	„	
673	134	„	
695	190	„	
702	206	„	18
728	46	VIII.	7
746	94	„	
747	94	„	9
748	94	„	10
751	94	„	11
752	109	„	
753	110	„	
754	110	„	
755	110	„	19
756	110	„	30
757	110	„	20
758	110	„	21
759	126	„	22
760	126	„	41
761	126	„	42
762	126	„	
763	126	„	57
764	126	„	
765	126	„	22
766	126	„	
767	142	„	43
768	142	„	23
769	142	„	
770	142	„	
771	142	„	31
772	142	„	
773	158	„	23

1).	2).	3).	4).
774	158	**VIII.**	43
775	158	„	32
776	158	„	33
777	158	„	
779	158	„	
780	174	„	
781	174	„	35
782	174	„	
783	174	„	43
784	174	„	35
785	174	„	44
786	174	„	44
787	190	„	
	12	**IX.**	
788	190	**VIII.**	57
789	190	„	71
790	190	„	81
791	190	„	45
792	190	„	45
793	190	„	35
794	190	„	
795	12	**IX.**	46
796	12	„	46
797	12	„	119
798	12	„	129
799	12	„	46
800	12	„	
801	12	„	46

1).	2).	3).	4).
802	24	**IX.**	58
803	24	„	102
	84	„	
804	24	„	58
805	24	„	
806	24	„	102
807	24	„	59
808	24	„	59
809	24	„	83
810	36	„	103
811	36	„	
812	36	„	
813	36	„	
814	36	„	104
815	36	„	
816	36	„	
817	36	„	104
818	48	„	
819	48	„	
820	48	„	
821	48	„	
822	48	„	121
823	48	„	
824	48	„	105
825	48	„	107
826	60	„	
827	60	„	
828	60	„	
829	60	„	130

1).	2).	3).	4).
830	60	**IX.**	130
831	60	„	131
832	60	„	
833	60	„	132
834	60	„	121
835	72	„	
836	72	„	
837	72	„	
838	72	„	
839	72	„	140
840	72	„	
841	72	„	141
842	72	„	133
843	84	„	
844	84	„	134
845	84	„	142
846	84	„	
847	84	„	
848	84	„	143
849	84	„	143
850	96	„	
851	96	„	
852	96	„	
853	96	„	
854	96	„	
855	96	„	
856	96	„	
857	96	„	
858	108	„	

1).	2).	3).	4).
859	108	**IX.**	
860	108	„	
861	108	„	
862	108	„	
863	108	„	
864	108	„	
865	108	„	
866	122	„	
867	122	„	
868	122	„	
869	122	„	
870	122	„	
871	122	„	
872	134	„	
873	134	„	
874	134	„	
875	134	„	
876	134	„	
877	134	„	
878	134	„	
879	144	„	
880	144	„	
881	144	„	
882	144	„	
883	144	„	
884	144	„	
885	144	„	
886	144	„	

TABLOUL NUMELOR[1])

Abason E., 1, 119.
Abel H., 119.
Abramescu N., 1.
Adam M., 128.
Adam D. R., 1.
Adamescu M., 1.
Agopescu M. *M.*, 68,
Akerman C., 56, 71, 80.
Alaci V., 1, 3, 7, 11, 12, 13, 20, 24, 25, 33, 36, 37, 44, 48, 49, 56, 60, 61, 68, 72, 73, 81, 83, 84, 97, 104, 105, 108, 109, 118, 121, 122, 123, 134. 135, 140, 144.
Albeață N. E., 56, 71.
Aldea N. N., 20, 58, 71, 72, 81, 104, 105, 129.
Alexandrescu Elena, 1,
Alexandrescu N. N., 102. 121, 122, 131, 133, 141, 142, 143, 144.
Almăjan P., 10, 11, 19, 20, 22, 23, 24, 31, 32, 43, 71, 81, 104, 105, 121, 130, 131, 132.
Andrei R., 33, 35, 47.
Angelescu A., 1, 140
Angelescu N. N., 71.
Angheluță Th., 1, 29, 78.
Anghianu M., 104.
Antoneseu A., 106, 122, 141.
Antoniu E., 19.
Ardelea R., 56, 68.
Arganini V., 9, 11, 12.
Arghir I., 1.
Arsene A., 80.
Atanasiu C., 57.
Avramescu T. I., 71, 81.
Băcanu V. I., 71, 121, 122, 141, 143.
Bâcicov P. B., 10, 11, 12, 58, 82, 104, 106, 107, 121, 129, 130, 131, 132, 133, 141, 143.
Bâicicov P. V., 10, 11, 12, 58, 82, 104, 106, 107. 121, 130, 141, 143.
Baciu R., 22, 103.
Baciu G. T., 20, 23, 24, 33, 36, 71, 81.
Bădescu I. A., 71.
Bădescu L. R., 119, 129, 140.
Bădulescu V., 1.
Băjenescu P., 22, 23, 24.
Balaban Gh., 1.
Balaban I. Gh., 29, 30.
Balaban N., 1.
Bălășescu N. C., 23, 71.
Balasz D., 1.

[1]) In tabloul numelor din vol VIII. s'a omis a se menționa numele d-lui **Murăroiu I.** — Il menționăm aci așa cum trebuia înscris în vol. VIII.

Murăroiu I. 10, 11, 13, 14, 25, 31, 39, 41, 43, 44, 45, 57, 59, 60, 61, 75, 76, 77. 90, 91, 92, 93, 94, 107, 109 121, 122, 123, 125, 136, 139, 140, 142, 152, 153, 154, 155, 157, 158, 171, 172, 173, 174, 186, 189.

Bănărescu M., 1.
Banciu I., 1.
Barbilian D., 64, 119.
Bărbulescu N., 118.
Bărglăzan A., 29.
Baron C., 1.
Bârs P., 67, 71.
Bernoulli J., 119.
Beşchea N., 56, 57, 81.
Bey M. Gh., 56, 68, 69.
Bidoianu I. A. 122.
Bivolariu C. V., 80.
Blaha N., 78.
Blaşian I., 1.
Boerescu P. Gh., 46, 58, 102, 103, 104, 108, 121, 122, 133, 134, 141.
Bolgar V. D., 23, 43, 71.
Bolgar V. M., 24
Boruch C., 71.
Botea N, 18, 24, 56, 58 68, 69.
Botez M., 1.
Bouligand G., 64.
Braeşter I. O, 56, 68.
Bratoşin R., 10, 11, 20, 31.
Breazu D., 1.
Brezuica I. I., 43.
Brocard, 15.
Brotman I, 20, 22, 23, 24, 33, 35, 36, 43, 45, 58, 72, 104, 107, 122, 129, 130, 131, 132, 141, 142, 143.
Bugeanu C., 121.
Buicliu Gh, 1, 7, 12, 54, 60, 61. 64, 70, 71, 72, 73, 78, 108, 119, 122, 131, 135, 144.
Burghele B., 1.
Butoescu T., 1.

Călin M. Gh., 71.
Câlniceanu Gh. 57.
Cândea C, 1.
Capră A., 104, 121, 131.
Capriel I., 7.
Carabeţeanu Gh. P., 71, 80.
Caraman E., 1.
Cârdeiu V., 1.
Carp Ig., 7, 10, 11, 12, 13, 20, 22, 23, 24, 31, 32, 34, 35, 36, 42, 44, 45, 46, 48, 59, 60, 66, 68, 72, 78, 81, 82, 104, 107, 122, 130, 131, 132, 133, 134.
Căzămir A. I., 71.
Cercel St. C., 10, 71, 80.
Cernes A. M. 56, 68.
Cezaro, 28, 135.
Chappuis A. P., 119.
Chirilă V. Gh., 47, 60, 121, 133, 141, 143, 144.
Chirilă S. I. 12, 20, 22, 33, 35, 36, 72.
Chiţulescu I. I., 140
Chivulescu C., 1.
Ciancilian A., 11, 23, 24, 43, 102, 104, 121, 122, 143.
Cica Gh., 1.
Cioclov Gh., 12, 20, 31.
Cismărescu M., 1.
Ciupe A., 12.
Ciupe D., 140.
Ciurceu V., 1.
Codreş I. F., 121, 122, 141, 142, 143.
Coman A, 1.
Constantinescu Gh., 1, 41, 66, 79, 129.
Constantinescu Gh. Gh. 56.
Constantinescu I., 119.
Constantinescu N. S, 11.
Corneanu P. 1.
Coşniţă C, 7, 10, 11, 12, 13, 20, 22, 23, 24, 31, 32, 34, 35, 36, 42, 44, 45, 46, 48, 59, 60, 66, 68, 72, 78, 81, 82, 104, 107, 122, 130, 131, 132, 133, 134, 141, 143, 144.
Costache N., 58, 121, 122.
Costăchescu V. C., 20, 44, 48, 57, 66, 71, 72, 120.
Crăciunescu N. E., 71.
Crăciunescu I., 1, 51.
Craiu N. I., 71, 81.
Cristache M. Gh., 102, 104.
Cristal Gh., 60, 143.
Cristescu I., 1, 29.
Cristescu C. I., 12, 34, 122.
Cristescu V., 29, 78, 140.
Crivăţ I. V., 84, 102, 104, 105, 107, 121, 122, 129, 131, 132, 133. 134, 141, 142, 143.
Cuciureanu Şt. 35, 36, 45, 47, 58, 72, 131, 141, 143.
Curcubată D., 71.
Curechi I, 47, 84, 142.
Cuţui I, 4, 14. 20.

Dănciulescu Gh. V., 9, 11, 12, 30, 36, 56, 68, 71, 80, 104, 105, 122, 129, 141, 143.
Dărmănescu I., 56, 68, 69.
Dăscălescu S. H., 105, 121, 122, 131, 133, 144.
David Em, 140.
Demetrescu Gh., 1.
Derenbaum M., 105, 106.
Diaconescu N., 1.
Diaconescu V. T., 56, 71.
Diaconu C. O., 71.
Dick J. 119.
Dima L., 118.
Diminescu G., 71, 81.
Dimitrie A. I, 23.
Dimitriu Gh. Şt., 57.
Dimitriu-Arad I., 1, 45.
Dimitriu At. I., 9, 10, 11, 12, 20, 22, 24, 31 32, 33, 34, 35, 36, 43, 44, 45, 47, 48, 58, 71, 83, 104, 105, 106. 107, 121, 122, 130, 131, 132, 133, 141, 144.
Dinu S. D., 57.
Diofante, 50
Dobrescu C. Ana, 80.
Doiciu N., 143, 144.
Dordea H., 71.
Dordea A. T., 1, 54.
Dorobanţiu I, 12.
Dragalina C., 1.
Drăgan G., 81.
Drăguţ G. V., 9, 10, 11, 24, 45, 72.
Drig P., 22, 23, 41.
Drinceanu A. B., 143.
Dumitreccu V. C., 20, 24, 45, 58.
Dumitrescu E., 57, 66, 68, 71.
Dumitrescu Gh., 1.
Dumitrescu N., 20, 22, 31.
Dumitrescu Natalia, 71.
Duport G., 71.
Duţulescu M., 1.

Euler, 4, 11, 25, 33, 45, 78, 135, 138.

Fajon A., 71.
Feldstein M. S., 56, 68.
Fericeanu S. St., 46, 57, 58, 60, 71, 83, 103
Fermat, 133.
Firoiu I., 120, 129, 143.
Florea Gh., 71.
Florescu M., 1.
Florescu M. O., 66.
Focşeneanu I. M., 29, 140, 144.
Fou ault, 140.
Fränkel F., 71.
Frantiu I., 80.
Frăsineanu Mărioara, 71.
Fredholm, 29.
Fregier, 54.
Froda A., 119
Frumuşeanu H. Gh., 71.

Ganea V., 71.
Gataiantu A. B., 71.
Gavrileseu D., 43.
Gavrilescn V., 12, 22, 23, 24, 45, 47, 48, 58.
Georgescu C., 81.
Georgescu D., 1.
Georgescu S. G., 71, 81.
Georgescu T. P, 104.
Ceorgescu-Racoviţă I, I., 118, 119.
Georgescu-Val. I. 139.
Gérard L., 140.
Gergonne, 135.
Gheorghe M., 71.
Gheorghieff N., 20, 22, 31.
Gheorghiev N., 10, 20.
Gheorghiu Al., 9.
Gheorghiu C. A, 66.
Gheorghiu Th. Gh., 7, 68, 71, 80.
Gheorghiu A. Ş., 54.
Gheorghiu Silvia, 71.
Gheorghiu Tr., 57.
Ghermănescu M., 1. 119, 129.
Ghermani D., 119.
Ghişoiu I. P., 11, 12, 20, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 36, 40, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 57, 58, 59, 71, 72, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 102, 103, 104, 105 106, 107, 121, 122, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 141, 142, 143, 144.
Glatz Sanda, 23, 24, 43.
Gob, 102.
Göbl, 50, 51.
Goormaghtigh R., 118.
Gradin I. Gh., 56, 67.
Grecu M. C., 121, 122, 133, 143.
Grigore I., 71.
Grinberg M., 143.
Grofşoreanu I. G, 71, 80.
Grossat E. C., 71.
Grossu I. M, 11, 20. 22, 23, 24, 32, 33, 35, 36, 41, 43, 45, 46, 47. 48, 58, 59, 60, 104, 105, 106, 107, 121, 129, 130, 132, 133.
Grozăvescu D., 56.

Haim F. L., 71.
Hamerak C., 24, 31, 33, 34, 36, 43, 83, 84, 103, 105, 106, 107, 129, 132, 143.
Haret Sp., 139.
Herrero L. F., 140.
Hristea H., 1.
Hubert M., 1.
Huyghens, 124, 125.

Iacob S. E., 22, 23, 24, 33, 81.
Iancu H. D., 56, 68.
Ieremia P., 64.
Iliescu T. T., 71.
Iliuță-Dăbuleni I., 12, 22.
Ioachimescu A., 37.
Ioanițescu D., 47, 58, 60, 102, 104, 121, 122, 131, 133, 141, 143, 144.
Ionescu-Bujor A., 56, 70.
Ionescu-Bujor C., 3, 25, 56, 67, 68, 70, 135.
Ionescu K. C., 1.
Ionescu V. D., 7.
Ionescu P. H., 10, 12, 18, 20, 22, 24, 43, 46, 55, 58, 59, 60, 97, 102, 103, 104, 105, 107, 108, 120, 121, 122, 130, 131, 133, 134, 141, 143.
Ionescu I, 50, 78, 119, 140.
Ionescu C. I, 102, 121, 133, 134, 141, 143, 144.
Ionescu G. I, 102, 121, 122, 141.
Ionescu-Țiu D. C., 9, 10, 12, 19, 20, 22, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 58, 59, 60, 72, 82, 84, 103, 104, 105, 106, 108, 120, 121, 122, 129, 130, 131, 132, 133.
Iotta D. M., 12.
Iovănescu D., 71.
Iovănescu F., 81.
Isăcescu C. C., 81.
Isăcescu T., 71.
Iscovici P., 56, 57, 68.

Jacques L., 20, 22.
Jeannel R., 119.
Jecu M. I., 1.
Jijie A. I., 44.

Koenig, 119.

Lagrange, 76, 77.
Laine E., 64.
Lalan V., 118.
Lalescu T., 1, 18, 49, 50, 51, 119, 129.
Lapteș E. 33, 34.
Lateș I., 71.
Laugier H., 140.
Laval, 128.
Leonida D., 1
Lemoine, 135.
Lepădatu I. M., 68.
Licev I. 12.
Linteș I., 1, 100, 101, 129.
Liteanu Gh., 1.
Lupan A., 1.
Lupescu N. A., 33.
Lupescu Gh. C., 32, 33, 36, 43, 45, 58, 102, 103, 104, 121, 141, 143.
Lupescu V. E., 56.

Magheru I., 1.
Maior A., 119.
Malcoci C., 118.
Malffati, 140.
Manolescu I. N., 56, 57, 68, 71.
Manughevici C., 2.
Mara Șt., 143.
Mardan D., 2.
Mărgineanu I., 60, 72, 108, 132, 134, 144.
Marinaș M., 9.
Marineanu Tr., 20, 23, 24, 31, 33, 34, 36, 41, 45, 47, 48, 58, 59, 60, 83, 84, 102, 103, 104, 105, 108, 121, 130, 131, 132, 134, 141, 142, 143, 144.
Mariș M., 57.
Marius Maria, 68.
Mătăsariu C. T., 71, 80.
Mățieș V. I., 131, 132.
Mecu I. I., 121.
Menelaus, 42.
Mereuță E., 23, 24, 33, 58, 59, 102, 104, 121, 122, 131, 134, 141, 143.
Micula O. 12, 22.
Mihăileanu N. N., 102, 133, 134, 143.
Mihăilescu I., 121.
Mihăilescu N. N., 122.
Mihalcea I. E, 11, 12, 20, 22, 23, 24, 33, 36, 41, 43, 44, 45, 47, 48, 58, 59, 60, 81, 103. 129.
Mihaly E., 2.
Mihuț M., 19.
Miklosi C., 29.
Milea G. E., 10, 12, 20, 22, 23, 24, 33, 36, 43, 45, 47, 104, 106, 121, 122. 131.
Mioc V., 2.
Mocănescu I., 22, 24, 58, 102, 104, 122.
Mocuța Tr., 71.
Moisil Gr., 54, 119.
Motoc D. C., 122, 141, 144.
Müller C. Gh., 71.
Murăroiu I., 9, 11, 12, 20, 28, 29, 30, 33, 35, 43, 47, 63, 77. 105, 108, 121, 122, 131, 132, 141.
Murgulescu G. I., 140.
Mușta Ș., 18.
Muster St. D., 71.

Naneș Gh.,
Nasta L., 22.
Negoescu A. I.. 144.
Negoescu I. P., 45.
Negra A. M., 10, 12, 20, 22, 24, 31, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 47, 48, 58, 60, 72, 104, 105, 106, 108, 121, 122, 129, 130, 131, 133, 134, 141, 142, 143.
Negrescu A. I., 122.
Nestor G. D., 56, 57, 67, 68, 70.
Neuberg, 102.
Nichifor Gh., 2.
Nichiforescu Gh. Gh., 9, 10, 11, 20, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 43, 45, 48, 84, 129, 134. 141, 143.
Nicolae Gr. 12.
Nicolescu M., 64, 140.
Nicolau-Dobrioor I., 56, 68, 134.
Nicolau M., 54.
Nicolau P., 2.
Nicolau A. V., 71
Niculescu Cr., 2.
Niculescu St. Em., 68.
Noaghea Gh., 2.
Novacu V., 68, 81.

Oncica I., 2.
Onicescu O., 2, 54, 119.
Orășanu C., 2.
Orășanu Gr., 2.
Orizaba P. N., 57.
Ostrogovitch A., 119, 140.
Otopeanu C., 2.

Paliță C. 131, 141, 143.
Pantazi M. A, 71, 118.
Pantu Z. I., 9, 10, 12, 30, 56, 57, 71, 80.
Pârvu A., 64, 71.
Pascu S., 57.
Patega T. I., 9.
Patron M., 102, 110, 121. 122, 131, 133, 134, 141, 143.
Pavel H. N, 48, 71.
Petrescu A., 2.
Petrescu Tr., 131, 141, 143.
Petrică I., 11, 12, 30, 122, 129, 141, 143.
Petricoane D. M, 2.
Petrovici D., 10, 12, 20, 22, 46, 47, 48, 58, 121, 131, 132, 133.
Picard E, 18.
Podariu A., 68, 71, 81.
Pompeiu D., 105, 106, 108, 140.
Popa Gh. I., 22, 24, 33, 43, 46, 58, 71, 72, 80, 102, 103, 104, 105, 121, 122, 133, 134, 141, 143.
Popa O. I., 41.
Popescu N. C., 56, 68, 71.
Popescu E., 2.
Popescu O. I., 10, 131, 141.
Popescu D., I., 36.
Popescu Gh. Gh., 102, 121, 133, 142, 143, 144.
Popescu D. N., 33, 34, 47, 82, 131.
Popescu D., St., 56, 82.
Popescu C. V., 80, 81.
Popovici C. C., 41.
Popovici G. Val., 141.
Popoviciu T., 37, 48, 52, 64, 101, 108, 122, 128.
Procopiescu N., 71.
Protopopescu I., 2, 36, 108.
Purcariu I., 2.
Purdilă A, 141, 143.

Raciu G. R., 36, 46, 47, 48, 58, 59.
Racliș N. R., 2, 18, 102.
Radu A., 72.
Radulescu C. M., 57.
Raiceff Gh. R., 120.
Rainer Gh., 81.
Râmniceanu I. Cr., 4,5, 9, 12, 20, 35, 44, 46, 81.
Râpeanu V., 68.
Ripan R., 118, 119.
Roibănescu C., 2.
Roman I., 7., 9, 10,11, 12, 19, 24, 30, 71, 80, 103, 104, 106.
Russu L., 36, 47, 82, 103, 104, 109, 141, 143.

Sabetay A., 81.
Saegiu E., 2.
Sandor A., 29.
Săndulescu I. I., 41.
Sassu V. I., 57, 71, 80.
Saur I., 12, 20, 31.
Savin C. I., 9, 11, 12, 20, 22, 23, 24, 30, 43, 46, 72, 80, 121.
Scarlat A., 72.
Scarlat V. D., 10, 12, 20, 22, 31, 36, 46, 47, 48, 71, 83, 84, 102, 122, 129, 133, 134, 141, 142, 143, 144.
Schiopulescu M. I., 103, 121, 122, 141.
Schuler D., 46, 47, 58, 59, 60, 103, 104, 105, 106, 120, 121, 129, 131, 132, 133.
Scripcă L., 68.
Scripcă M., 57, 71.
Scurtu A. N., 12.
Secăroiu D., 11, 12, 20, 24, 32, 33, 71, 104, 106.
Segal L., 68.
Segârceanu C. C., 71.
Segârceanu C. N., 7, 18, 29, 41, 54.
Şeimulescu I., 71.
Şerban-Ulmeni D., 58, 103, 104, 105, 106, 121, 122, 134, 144.
Şerbănescu D., 2.
Sergescu P., 2, 64, 73, 84, 102, 119.
Severineanu C., 2.
Silachi A., 44.
Silvian E., 22, 24.
Simionescu G., 143.
Simniceanu S., 2.
Simson, 26, 27, 135.
Sirchis I., 9, 10, 11, 12, 19, 30.
Smighelschi O., 29.
Sobel I. M., 56, 68, 69.
Spacu C., 119, 140.
Spineanu C., 2.
Sprinceană C. Gh., 9, 10, 11, 12, 19, 30, 71, 80.
Stan I. A., 9, 12, 19, 30, 66, 68. 71, 81.
Stăncescu C., 2.
Stănescu N. P., 22, 23, 24, 33, 58.
Stănescu M. T., 71.
Ştefănescu A., 141.
Ştefănescu E., 56.
Şteiner, 135, 136.
Ştiopu P., 41.
Stoica N. A., 56, 57, 68, 71.
Stoicescu M., 2.
Stoicescu T., 71.
Sturm, 140.
Suciu G., 119, 140.

Tănăsescu A., 7.
Tănăsescu A. T., 119.
Ţanovici V. C., 68, 71, 81.
Tăraş V., 56, 66, 68.
Ţari N. Gh., 56, 71.
Tauber, 128.
Taylor, 39.
Teodorescu A., 81.
Teodorescu C. C., 2, 3, 13, 25, 37, 49, 61, 75, 97, 109, 123, 135.
Teodorescu N. 56 66, 68, 118.
Teodorescu Stavarache, 104 121, 131, 134, 141, 142, 143, 144.
Teodorescu Şt.' 122.
Teodosiu A., 2.
Thébault V., 102, 128.
Thierrin G., 2.
Ţino O., 2, 29, 108, 118, 122.
Ţiţeica G., 41, 119.
Ţiţeica Ş., 18.
Ţiucra M., 10, 11, 12, 20, 22, 46, 58, 59, 60, 104, 106, 108, 121, 130, 132.
Tomeşcu C. N., 22.
Tomescu V., 81.
Toporescu Er. 119.
Trofimov P., 64.
Toussaiut A., 29, 112.
Tutoveanu V., 46. 46, 58, 72. 82, 121, 122, 131. 132, 141.

Ungureanu D. Gh., 71, 121, 122.

Vâlceanu N. J., 10, 11, 12, 16, 19, 20. 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 54, 58, 59, 60, 71, 72, 81. 82, 84, 103, 106, 108, 121, 129, 130, 131, 132, 133, 141, 144.
Vâlcovici V., 2. 18, 30, 49, 55, 75, 118, 119, 113.
Vâlsănescu V., 129.
Vasilescu B., 68, 71.
Vasilescu Karpen 119.
Vasiliu Gh., 2.
Vasiliu Gh. Gh., 22, 35, 36, 48, 56, 68, 69, 81, 119.
Vasiliu M., 2.
Vlad I. A., 9.
Vlad I. V., 2.
Vlădea I., 56.
Vonica C. I., 22, 23, 24, 33, 34, 35, 36, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 129.
Vrânceanu G., 118.

Winckler A. A., 56, 57, 66, 68.

Zagaican I., 36, 40, 45, 46, 47, 48, 57, 58, 71, 83, 120, 129.
Zaharia C., 71.
Zaharia O. I., 71.
Zaharia O. N., 7, 20, 21, 71, 102.
Zamfirescu-Piteşti A., 10.
Zamfirescu Gh. I., 57, 66, 71.
Zapan Gr., 2.
Zoiade Gr. 143.

INFORMAȚIUNI

Premiul Traian Lalescu.

Premiul anual „*Traian Lalescu*“ oferit de *Revista Universitară Matematică*, de sub direcția d-lui Profesor *Rodolphe Racliș*, celor mai distinși licențiați în științe matematice sau ingineri diplomați și cari au contribuit la activitatea *Revistei Universitare*, a fost decernat pentru anul 1929 în modul următor:

Premiul I în valoare de 10.000 (zece mii) lei, d-lui *Șerban Țițeica* licențiat în științe matematice și licențiat în științe fisico-chimice dela Facultatea de Științe din București.

Premiul II, în valoare de 3.000 (trei mii) lei, d-lui *Virgil Claudian*, licențiat în științe matematice dela Facultatea de Științe din București.

Premiul III, în valoare de 2.000 (două mii) lei, d-lui *Nicolae Teodorescu*, licențiat în științe matematice dela Facultatea de Științe din București.

Se acordă în plus d-lui *Virgil Claudian* din „Fondul *Traian Lalescu*“, suma de 30.000 (treizeci mii) lei, ajutor de cărți.

Dragutin Ciupe (director). Probleme rezolvate din aritmetică și algebră (Metoda cea mai lesnicioasă pentru a învăța în scurt timp „Regula de trei simplă și compusă, fără profesor). Prețul 20 lei plus porto; a se adresa autorului: Str. Ungurească No. 30, Bistrița, Jud. Năsăud.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu li-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Legându-se colecția R. M. T., anul VIII, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII cu prețul de lei 100 volumul și se trimete la cerere.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

BIBLIOTECA „ASTRA“
SIBIU

Sucursala Timişoara

Sucursala Timişoara

5 lei